МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

В. В. Губська, В. Ф. Кришталь

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА:
Динаміка: Практикум

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»,
спеціалізаціями
«Інструментальні системи інженерного дизайну»,
«Технології комп’ютерного конструювання верстатів, роботів та машин»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензенти: Рижков Л. М., д-р техн. наук, професор
Пасічник В. А., д-р техн. наук, професор

Відповідальний редактор Янчевський І.В., д-р фіз.-мат. наук, професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 9 від 30.05.2019 р.)
за поданням Вченої ради Механіко-машинобудівного інституту (протокол № 9 від 22.04.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Губська Вікторія Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, ст. викл.
Кришталь Володимир Федорович, канд. техн. наук, доц.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА:
Динаміка: Практикум

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА: Динаміка: Практикум. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна механіка», спеціалізацій «Інструментальні системи інженерного дизайну», «Технології комп'ютерного конструювання верстатів, роботів та машин» / В.В. Губська, В.Ф. Кришталь; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,97 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 98 с.

Навчальне видання складається з завдань, які охоплюють основні теми розділу «Динаміка» дисципліни «Теоретична механіка» і рекомендуються студентам для самостійного опрацювання. Для кожного завдання можна сформувати до ста комбінацій умов. Завдання супроводжуються прикладами, в яких одночасно подається методика розв'язання. Для закріплення отриманих умінь пропонуються контрольні запитання.

Навчальне видання може бути використане викладачами при проведенні практичних занять, при підготовці завдань для проведення модульних контрольних робіт та розрахункових робіт.

Зміст

ВСТУП

Розділ «Динаміка» дисципліни «Теоретична механіка» складає зміст кредитних модулів *«Теоретична механіка-2»* та *«Теоретична механіка-3»*, у якому вивчають методи складання *диференціальних рівнянь руху* матеріальної точки, твердого тіла та системи твердих тіл за допомогою законів Ньютона, основних теорем динаміки та рівнянь Лагранжа II роду.

Вивчення вказаних кредитних модулів дає студенту конкретні знання для складання математичної моделі руху окремих матеріальних точок, твердих тіл та механічної системи, уміння запису диференціальних рівнянь руху, постановки задачі Коші для конкретних об'єктів дослідження, і є фундаментом для вивчення таких дисциплін як «Теорія коливань», «Теорія стійкості механічних систем», «Теорія автоматичного керування», «Гідро- і аеродинаміка», «Теорія пружності».

Важливою складовою модуля є практичні уміння, оскільки саме на них проявляються знання студентами теоретичного матеріалу, оволодіння методиками розрахунків параметрів механічних систем та математичного моделювання їхнього руху. Саме цій меті присвячена дана робота, яка включає вісім завдань, поданих у змісті. Розрахункові схеми та числові дані дозволяють забезпечити до ста комбінацій вхідних даних однакових за складністю та змістом. При виконанні завдання студент обирає рисунок та набір числових даних відповідно до двозначного шифру (номеру варіанта), який надає викладач. Перша цифра шифру визначає номер рисунка, друга цифра шифру визначає номер набору числових даних.

При підготовці завдань студентам рекомендується відповісти на контрольні питання, які наведені в кінці посібника і згруповані за темами завдань.

Матеріал посібника серед авторів розподілено наступним чином: завдання 1 та 3 написано В. В. Губською, завдання 2, 4-8 написано В. Ф. Кришталем.

Завдання 1. Диференціальні рівняння руху точки

Матеріальна точка *M* масою m (кг) починає рухатись вздовж відрізка *AB* з початковою швидкістю $\vec{v}_A$ (м/с). Тривалість руху на ділянці *AB* складає τ (с). На рисунках 2, 4, 5, 8, 9 на цій ділянці на точку *M* діє сила опору середовища *R*, а також сила *F*. На рисунках 0, 1, 3, 6, 7 на ділянці *AB* на точку *M* діє сила тертя ковзання з коефіцієнтом тертя *f*. В положенні *B* точка *M* або покидає площину *AB* (рисунки 0, 1, 3, 6, 7), або переходить на ділянку *BC*, рухаючись по закругленню, причому напрям швидкості змінюється, а числове значення $\vec{v}_B$ не змінюється. На рисунках 2, 4, 5, 8, 9 на відрізку *BC* на точку *M* діє сила тертя ковзання з коефіцієнтом тертя *f*.

Для рисунків 0, 1, 3, 6, 7 визначити закон руху точки *M* на ділянках *AB* і *BC*, визначити швидкість $\vec{v}_C$, яку точка *M* буде мати в положенні *C*, рухаючись вздовж *BC* протягом часу *T*, а також відстань *h*. Для рисунків 2, 4, 5, 8, 9 визначити залежність швидкості точки *M* від часу на проміжку *AB* і закон її руху на проміжку *BC*. Визначити також величини, позначені невідомими в таблиці.

Таблиця 1

варіант	m, кг	$\vec{v}_A$, м/с	$\vec{v}_B$, м/с	$AB = l$, м	τ, с	*R*, Н	*F*, Н	*BC*, (*d*), м	*T*, с	α, град	*f*
0	3	2	v_B	6	τ	0,5v	9	(*d*), *BC*	1,4	30	0,1
1	1	v_A	2,8	5	τ	1,2v^2	6	2,5	T	45	0,15
2	2	3	v_B	*l*	5	0,4v	10	2	T	60	0,11
3	1,2	v_A	2,6	3	τ	2,5v	8	(*d*), *BC*	1,2	45	0,2
4	3	2,4	v_B	5,5	τ	0,8v^2	15	(*d*), *BC*	1,8	30	0,12
5	4	6	v_B	*l*	3	2v^2	16	2,8	T	60	0,1
6	3,5	v_A	1,2	*l*	1,9	4v^2	18	(*d*), *BC*	2,5	45	0,25
7	5	v_A	1,8	5,8	τ	5v	10	(*d*), *BC*	5	30	0,14
8	1,8	3	v_B	*l*	3,2	0,2v	20	3	T	45	0,1
9	2	3,2	v_B	5,4	τ	0,6v^2	24	4	T	60	0,13

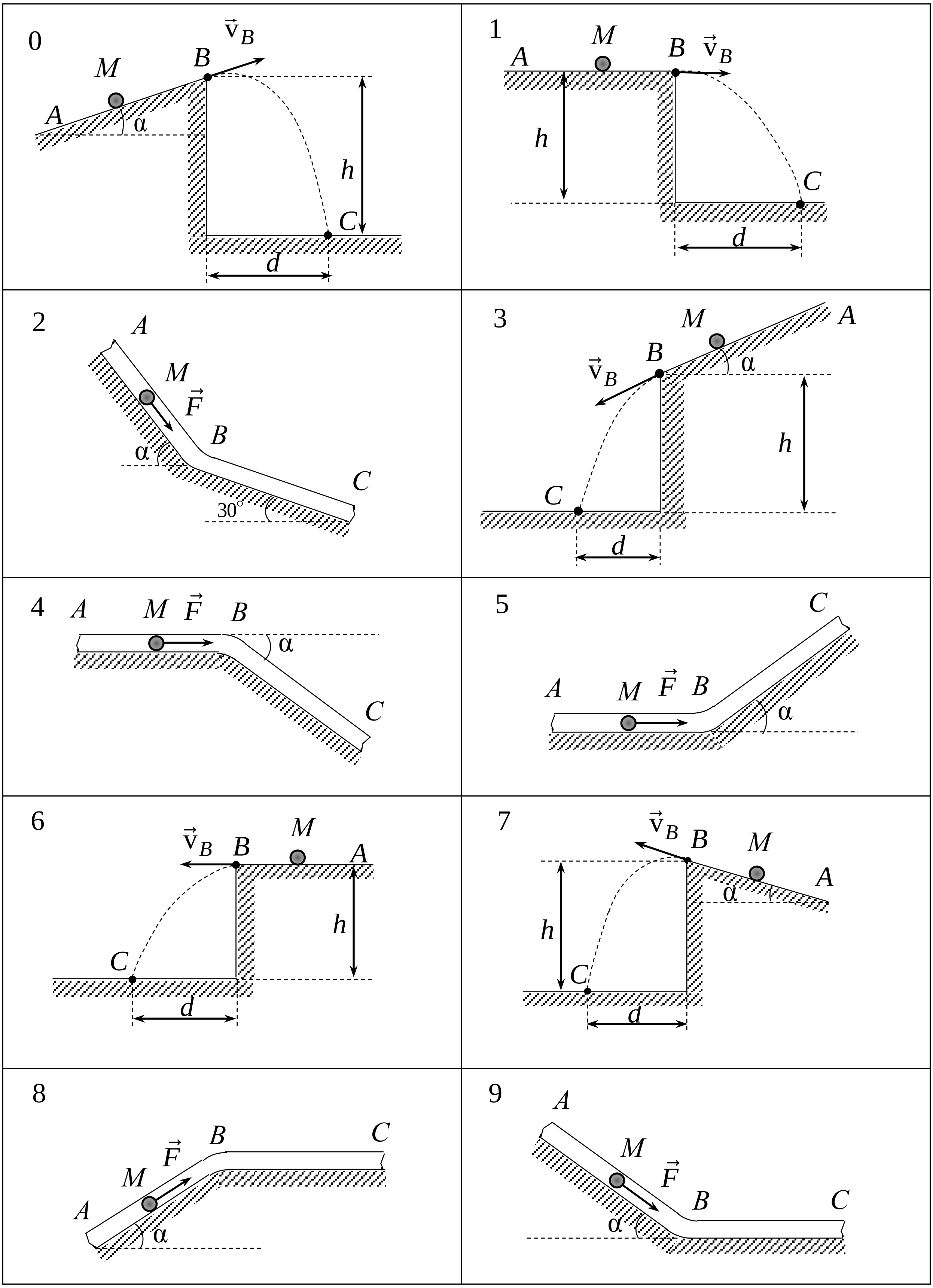

0
M
B
A
α
h
C
d
1
A
M
B
h
C
d
2
A
M
B
α
C
30°
3
M
A
B
α
h
C
d
4
A
M
B
α
C
5
C
A
M
B
α
6
M
B
A
h
C
d
7
B
M
A
α
h
C
d
8
B
C
M
A
α
9
A
M
B
C
α

Рис. 1.1

Приклад 1.1. Матеріальна точка *M* масою m починає рухатись вздовж відрізка *AB*=3м, що має нахил $\alpha = 30^\circ$, з початковою швидкістю $\mathrm{v}_A = 5$ м/с. На цьому відрізку на точку діє сила тертя ковзання з коефіцієнтом тертя ковзання *f*=0,12. Тривалість руху на ділянці *AB* складає τ с. В точці *B* тіло покидає площину *AB* зі швидкістю $\vec{\mathrm{v}}_B$ і попадає в положення *C* зі швидкістю $\vec{\mathrm{v}}_C$, знаходячись в повітрі протягом часу *T*=1,2 с. Визначити швидкості $\vec{\mathrm{v}}_B$ і $\vec{\mathrm{v}}_C$, а також час τ і значення *d* і *h* (рис.1.2).

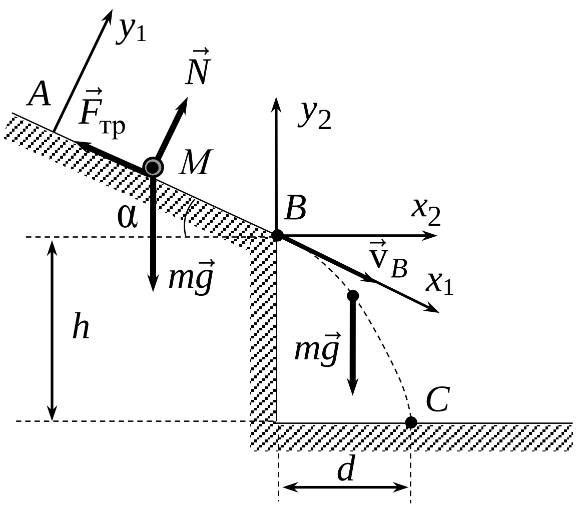


Рис.1.2

Розв’язання. Рух точки вздовж площини *AB* визначаємо відносно системи координат Ax_1y_1, а на ділянці *BC* – відносно Bx_2y_2. Початкові умови руху точки на ділянці *AB*: при $t = 0$, $x_{10} = 0$, $\dot{x}_{10} = \mathrm{v}_A$, а на ділянці $BC - x_{20} = 0$, $y_{20} = 0$, $\dot{x}_{20} = \mathrm{v}_B \cos\alpha$, $\dot{y}_{20} = -\mathrm{v}_B \sin\alpha$.

Під час руху матеріальної точки вздовж площини *AB* на неї діють сили тяжіння $m\vec{g}$, нормальна реакція $\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ ($F_{\text{тр}} = fN$). Під час руху по траєкторії *BC* на матеріальну точку діє тільки сила тяжіння $m\vec{g}$.

На основі другого закону Ньютона запишемо рівняння руху точки вздовж відрізка площини *AB*:

$$m\vec{\mathrm{w}}_1 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}; \qquad (1)$$

Спроектуємо рівняння (1) на осі системи координат Ax_1y_1:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}; \\ 0 = -mg\cos\alpha + N. \end{cases} \qquad (2)$$

З другої рівності (2) знайдемо $N = mg\cos\alpha$, тоді $F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha$.

Диференціальне рівняння руху точки *M* на відрізку *AB* має вигляд:

$$m\ddot{x}_1 = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha,$$

або

$$\ddot{x}_1 = g\ \sin\alpha - f\cos\alpha\ . \qquad (3)$$

Інтегруючи (3) двічі дістанемо:

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t + C_1; \qquad (4)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2 + C_1t + C_2. \qquad (5)$$

Використовуючи початкові умови руху точки на ділянці *AB*, визначимо сталі інтегрування $C_1 = \text{v}_A$, $C_2 = 0$, а також підставимо в закон руху (5) $\text{v}_A = 5$ м/с, $x_1 = l = 3$ м, $\alpha = 30^\circ$, *f*=0,12:

$$l = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau^2 + C_1\tau + C_2;$$

$$1{,}96\tau^2 + 5\tau - 3 = 0;$$

звідки $\tau_1 = 0{,}5$ с, $\tau_2 < 0$ (не має фізичного змісту). З (4) визначимо швидкість точки *M* в положенні *B*:

$$\text{v}_B = 9{,}8\cdot\left(\frac{1}{2} - 0{,}12\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 0{,}5 + 5 \approx 6{,}96 \text{ м/с}. \qquad (6)$$

Диференціальні рівняння руху точки на ділянці *BC* в системі координат Bx_2y_2 мають вигляд (рис. 1.2):

$$m\ddot{x}_2 = 0;\ m\ddot{y}_2 = -mg,$$

або

$$\ddot{x}_2 = 0;\ \ddot{y}_2 = -g. \qquad (7)$$

Інтегруючи рівняння (7) двічі, маємо:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = C_3; \\ \dot{y}_2 = -gt + C_5; \end{cases} \begin{cases} x_2 = C_3 t + C_4; \\ y_2 = -\dfrac{1}{2} g t^2 + C_5 t + C_6. \end{cases} \tag{8}$$

Використовуючи початкові умови руху точки на ділянці *BC*, визначимо сталі інтегрування:

$$C_3 = \mathrm{v}_B \cos\alpha;\ C_4 = 0;\ C_5 = -\mathrm{v}_B \sin\alpha;\ C_6 = 0; \tag{9}$$

Підставимо (9) в (8):

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \mathrm{v}_B \cos\alpha; \\ \dot{y}_2 = -gt - \mathrm{v}_B \sin\alpha; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \mathrm{v}_B t \cos\alpha; \\ y_2 = -\dfrac{1}{2} g t^2 - \mathrm{v}_B t \sin\alpha; \end{cases} \tag{10}$$

Друга система в (10) визначає закон руху точки *M* на відрізку *BC*.

Визначимо відстані d і *h*. Знаючи, що точка *M* рухалась з положення *B* в положення *C* протягом часу $t = T = 1{,}2$ с, можемо визначити координати x_2 та y_2 точки *M* в положенні *C*, причому координата x_2 буде визначати відстань d, а координата y_2 – відстань *h*:

$$x_2(t = T) = T \cdot \mathrm{v}_B \cos\alpha = 1{,}2 \cdot 6{,}96 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}23\,\text{м};$$

$$y_2(t = T) = -\frac{1}{2} g T^2 - \mathrm{v}_B T \sin\alpha = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (1{,}2)^2 - 6{,}96 \cdot 1{,}2 \cdot \frac{1}{2} \approx -11{,}23\ \text{м}.$$

Таким чином, $d = 7{,}23$ м, $h = 11{,}23$ м.

Визначимо швидкість v_C з першої системи (10):

$$\mathrm{v}_{Cx} = \mathrm{v}_B \cos\alpha = 6{,}96 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}03\,\text{м/с};$$

$$\mathrm{v}_{Cy} = -gT - \mathrm{v}_B \sin\alpha = -9{,}8 \cdot 1{,}2 - 6{,}96 \cdot \frac{1}{2} \approx -15{,}24\,\text{м/с};$$

$$\mathrm{v}_C = \sqrt{\mathrm{v}_{Cx}^2 + \mathrm{v}_{Cy}^2} = \sqrt{(6{,}03)^2 + (-15{,}24)^2} \approx 16{,}38\,\text{м/с}.$$

Відповідь: $\mathrm{v}_B = 6{,}96$ м/с, $\tau_1 = 0{,}5$ с, $\mathrm{v}_C = 16{,}38$ м/с, $d = 7{,}23$ м, $h = 11{,}23$ м.

Приклад 1.2. Точка M масою m = 2 кг починає рухатись вздовж трубки AB, що нахилена під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту, з початковою швидкістю $\mathrm{v}_A = 4$ м/с, де на неї крім сили тяжіння діє постійна сила F=19,2 Н і сила опору середовища, яка пропорційна квадрату швидкості $R = 0,2\mathrm{v}^2$ Н, довжина AB = 6 м. В положенні B точка M потрапляє на ділянку BC, що має нахил $\beta = 30^\circ$ до горизонту, де на неї крім сили тяжіння діє сила тертя з коефіцієнтом тертя f=0,1.

Знайти залежність швидкості точки M від часу на проміжку AB, швидкість точки M в положенні B і час, за який вона пройде цей відрізок. Визначити закон руху точки M на відрізку BC (рис. 1.3).

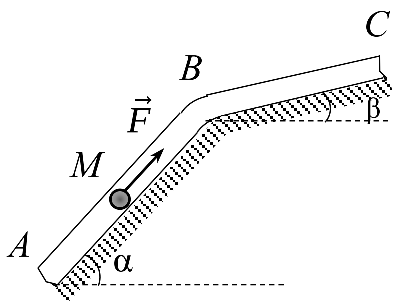


Рис. 1.3

Розв'язання. Рух точки M вздовж площини AB визначаємо відносно системи координат Ax_1y_1, а на ділянці BC − відносно Bx_2y_2. Початкові умови руху точки на ділянці AB: при $t = 0$, $x_{10} = 0$, $\dot{x}_{10} = \mathrm{v}_{10} = \mathrm{v}_A$, а на ділянці BC – $x_{20} = 0$, $\dot{x}_{20} = \mathrm{v}_{20} = \mathrm{v}_B$.

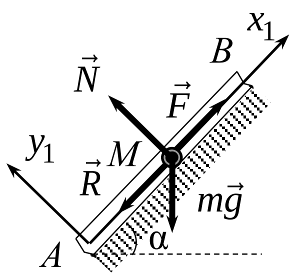


Рис. 1.4

Під час руху матеріальної точки вздовж площини *AB* на неї діють сили тяжіння $m\vec{g}$, нормальна реакція $\vec{N}$, прикладена сила $\vec{F}$ і сила опору середовища $\vec{R}$, причому $R = 0,2\text{v}_1^2$ (рис.1.4).

На основі другого закону Ньютона запишемо рівняння руху точки вздовж відрізка *AB*:

$$m\vec{\text{w}}_1 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{R}; \tag{11}$$

Проекції рівняння (11) на осі системи координат Ax_1y_1:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -mg\sin\alpha + F - R; \\ 0 = -mg\cos\alpha + N. \end{cases} \tag{12}$$

З першого рівняння системи (12) маємо:

$$\ddot{x}_1 = \frac{-mg\sin\alpha + F - R}{m} = -9,8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{19,2}{2} - \frac{0,2\text{v}_1^2}{2} \approx -\frac{\text{v}_1^2 - 11}{10}. \tag{13}$$

В диференціальному рівнянні (13) зробимо перехід від змінної t до змінної x_1, оскільки за умовою задачі точка досягає певної швидкості в положенні *B* після того як вона пройшла шлях *AB*:

$$\ddot{x}_1 = \dot{\text{v}}_1 = \frac{d\text{v}_1}{dt} = \frac{d\text{v}_1\cdot dx_1}{dt\cdot dx_1} = \text{v}_1\cdot\frac{d\text{v}_1}{dx_1}, \text{ де } \frac{dx_1}{dt} = \text{v}_1.$$

Внесемо змінну v_1 під знак диференціалу:

$$\text{v}_1\frac{d\text{v}_1}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{\text{v}_1{}^2}{2}\right)}{dx_1} = \frac{1}{2}\frac{d\ \ \text{v}_1{}^2}{dx_1}.$$

Отже диференціальне рівняння руху на проміжку *AB* має вигляд:

$$\frac{d\text{v}_1^2}{dx_1} = -\frac{\text{v}_1^2 - 11}{5}. \tag{14}$$

Розв'язання рівняння (14) проводиться за допомогою методу розділення змінних:

$$\int\frac{d\text{v}_1^2}{\text{v}_1^2 - 11} = -\int\frac{dx_1}{5},$$

звідки отримаємо:

$$\ln\left|\mathrm{v}_1^2-11\right|=-\frac{1}{5}x_1+C_1. \qquad (15)$$

Визначимо C_1 з початкових умов (при $t=0, x_{10}=0$, $\dot{x}_{10}=\mathrm{v}_A=4$ м/с): $C_1=\ln\left|16-11\right|=\ln 5=1{,}6$, тоді рівняння (15) буде мати вигляд:

$$\ln\left|\mathrm{v}_1^2-11\right|=-0{,}2x_1+\ln 5.$$

Після перетворень будемо мати:

$$\ln\left|\frac{\mathrm{v}_1^2-11}{5}\right|=-\frac{x_1}{5}; \qquad \frac{\mathrm{v}_1^2-11}{5}=e^{-\frac{x_1}{5}}.$$

Підставляючи довжину відрізка *AB* = 6 м, отримаємо швидкість точки в положенні *B*, яка визначається $\mathrm{v}_B^2-11=e^{-1,2}\cdot 5$,

$$\mathrm{v}_B=\sqrt{5\cdot e^{-1,2}+11}\approx 3{,}54 \text{ м/с}. \qquad (16)$$

Визначимо час проходження проміжку *AB*. Диференціальне рівняння для визначення часу буде мати вигляд:

$$\frac{d\mathrm{v}_1}{dt}=-\frac{\mathrm{v}_1^2-11}{10}.$$

За допомогою методу розділення змінних маємо:

$$\frac{d\mathrm{v}_1}{11-\mathrm{v}_1^2}=\frac{dt}{10}.$$

Використовуємо формулу

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

Для нашої задачі вона має вигляд:

$$\int\frac{d\mathrm{v}_1}{\left(\sqrt{11}\right)^2-\mathrm{v}_1^2}=\frac{1}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+\mathrm{v}_1}{\sqrt{11}-\mathrm{v}_1}\right|+C_2.$$

Тоді після інтегрування диференціальне рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{1}{2\cdot 3{,}3}\ln\left|\frac{3{,}3+\mathrm{v}_1}{3{,}3-\mathrm{v}_1}\right|=\frac{t}{10}+C_2\,. \qquad (17)$$

Визначимо константу інтегрування C_2 з початкових умов, підставляючи в (17) $\mathrm{v}_{10}=4$ м/с:

$$C_2=\frac{1}{6{,}6}\ln\left|\frac{3{,}3+4}{3{,}3-4}\right|=0{,}36\,. \qquad (18)$$

Тоді з (17) визначимо час, за який точка M пройшла відрізок AB, підставляючи швидкість в точці B ($\mathrm{v}_B=3{,}54$ м/с):

$$t=\left(\frac{1}{6{,}6}\ln\left|\frac{3{,}3+3{,}54}{3{,}3-3{,}54}\right|-0{,}36\right)\cdot 10\approx 1{,}5 \text{ с.}$$

Визначимо закон зміни швидкості з часом $\mathrm{v}_1(t)$. Підставимо в рівняння (17) константу інтегрування C_2, маємо:

$$\frac{t}{10}=\frac{1}{6{,}6}\left(\ln\left|\frac{3{,}3+\mathrm{v}_1}{3{,}3-\mathrm{v}_1}\right|-\ln\left|\frac{7{,}3}{-0{,}7}\right|\right).$$

Після перетворень отримаємо:

$$t\cdot 0{,}66=\ln\left|\frac{-2{,}31-0{,}7\mathrm{v}_1}{24{,}09-7{,}3\mathrm{v}_1}\right|; \qquad \frac{-2{,}31-0{,}7\mathrm{v}_1}{24{,}09-7{,}3\mathrm{v}_1}=e^{0{,}66t};$$

$$\mathrm{v}_1=\frac{24{,}09e^{0{,}66t}+2{,}31}{7{,}3e^{0{,}66t}-0{,}7}\,. \qquad (19)$$

Рівність (19) визначає закон зміни швидкості точки M з часом на відрізку AB.

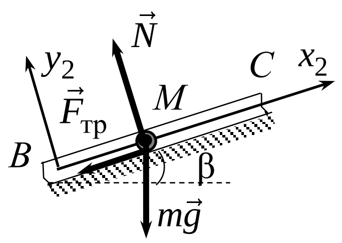


Рис. 1.5

Складаємо диференціальне рівняння руху точки M на ділянці BC. Вказуємо сили, які діють на точку, і знаходимо суму проекцій сил на осі системи координат Bx_2y_2 (рис. 1.5):

$$m\vec{w}_2 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр};$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_2 = -mg\sin\beta - F_{тр}; \\ 0 = -mg\cos\beta + N, \end{cases} \tag{20}$$

де $F_{тр} = fN$. Визначимо реакцію N з другого рівняння (20): $N = mg\cos\beta$, тоді $F_{тр} = fmg\cos\beta$. З першого рівняння (20):

$$m\ddot{x}_2 = -mg(\sin\beta + f\cos\beta).$$

Отже рівняння руху точки M вздовж відрізка BC має вигляд: $\dfrac{dv_2}{dt} = -5{,}74$, звідки $v_2 = -5{,}74t + C_3$.

Початковою умовою для цього інтегралу буде $v_{20} = v_B = 3{,}54$ м/с, знайдена в (16), тому стала $C_3 = 3{,}54$. Тоді залежність швидкості v_2 від часу буде мати вигляд: $v_2 = -5{,}74t + 3{,}54$.

Знайдемо залежність координати x_2 від часу на ділянці BC, враховуючи, що $v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$:

$$\int dx_2 = \int (-5{,}74t + 3{,}54)\,dt; \qquad x_2 = -5{,}74\frac{t^2}{2} + 3{,}54t + C_4.$$

Початковою умовою інтегралу буде $x_{20} = 0$ при $t = 0$ і $C_4 = 0$. Тому остаточно залежність координати x_2 від часу на ділянці BC:

$$x_2 = -5{,}74\frac{t^2}{2} + 3{,}54t \text{ м.}$$

Відповідь: $v_B = 3{,}54$ м/с, $v_1 = \dfrac{24{,}09e^{0{,}66t} + 2{,}31}{7{,}3e^{0{,}66t} - 0{,}7}$, $t = 1{,}5$ с, $x_2 = -5{,}74\dfrac{t^2}{2} + 3{,}54t$ м.

Завдання № 2. Прямолінійні коливання матеріальної точки.

Знайти закон руху тіла *M* масою m вздовж осі Ox (рис. 2.1), припускаючи, що розмірами тіла можна нехтувати і вважати його матеріальною точкою.

Тіло закріплене за допомогою двох пружин з коефіцієнтами жорсткості c_1 та c_2. Рух тіла викликається або збурювальною силою $Q(t) = Q_0 \sin(\omega_B t + \delta)$ (Q_0 – амплітудне значення, ω_B – колова частота, δ – початкова фаза збурювальної сили) або початковим відхиленням x_0 від положення рівноваги або початковою швидкістю $\dot{x}_0$. При русі тіла може виникати сила опору $\vec{R} = -\beta \vec{v}$, яка пропорційна швидкості $\vec{v}$. Числові дані подано у таблиці 2. Кут α нахилу площини руху до горизонту вимірюється в градусах. У випадку відсутності позначення α на рисунку, вважати $\alpha = 0$.

Таблиця 2.

Варіант	m, кг	β, $Н \cdot с/м$	c_1, Н/м	c_2, Н/м	α, °	$Q(t)$, Н	x_0, м	$\dot{x}_0$, м
0	2	40	2400	1200	30	$100 \sin 25t$	0	0
1	1	60	1200	3600	45	0	0	3
2	4	0	4800	2400	60	$80 \cos(20t + \pi/4)$	0	0
3	2	120	1200	600	45	0	0,05	0
4	4	32	400	1200	15	$50 \cos(15t - \pi/3)$	0	0
5	1,5	60	900	1800	30	0	0	4
6	10	0	1000	3000	60	$150 \sin 19t$	0	0
7	2	0	600	300	15	0	0	2
8	10	0	3000	6000	30	$180 \sin 30t$	0	0
9	3	36	1800	3600	45	0	0,1	0

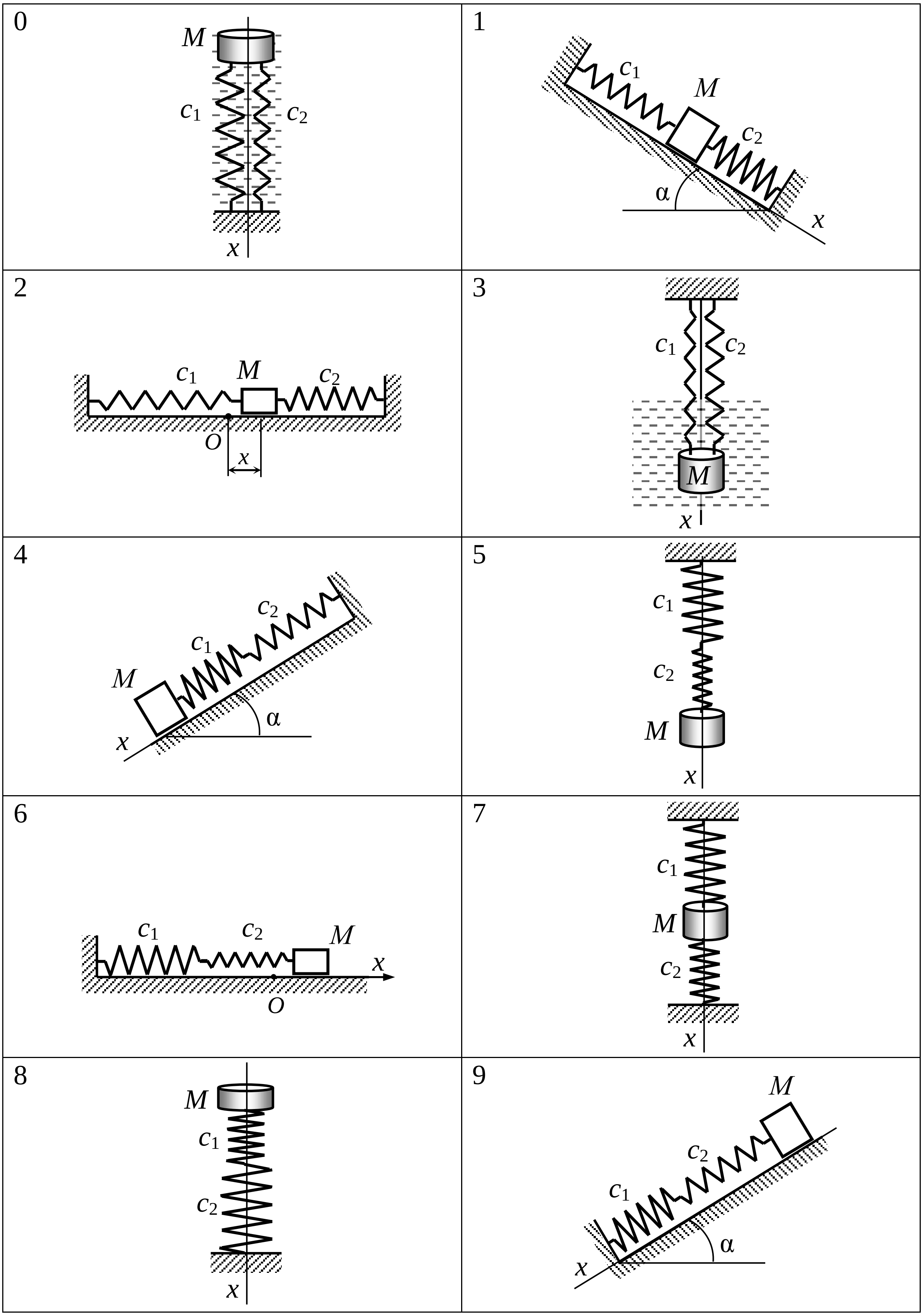

0
M
c1
c2
x
1
c1
M
c2
α
x
2
c1
M
c2
O
x
3
c1
c2
M
x
4
c2
c1
M
α
x
5
c1
c2
M
x
6
c1
c2
M
x
O
7
c1
M
c2
x
8
M
c1
c2
x
9
M
c2
c1
α
x

Рис. 2.1

Приклад 2.1. Тіло *M* прикріплено до вільного кінця вертикальної пружини і може здійснювати вертикальні рухи (рис. 2.2). Маса тіла *M* дорівнює m=2 кг. Коефіцієнт жорсткості пружини c=450 Н/м. При русі тіла *M* на нього діє сила опору середовища (стиснене повітря або інший газ). Сила опору пропорційна першому степеню швидкості тіла і дорівнює R=βv, де β=32 $\text{Н}\cdot\text{с/м}$.

Визначити закон руху тіла *M*, якщо в початковий момент часу воно було зміщено вниз на 5 см від положення рівноваги і йому була надана швидкість 0,2 м/с, напрямлена вниз.

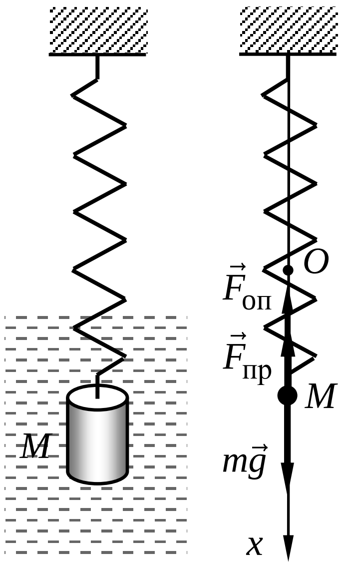


Рис.2.2

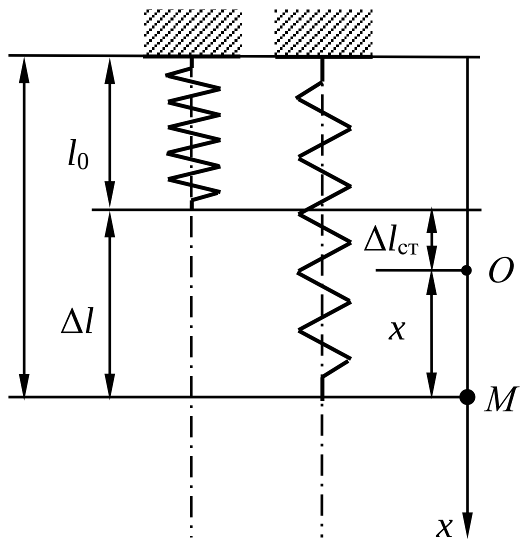


Рис. 2.3

Р о з в ' я з а н н я. Для розв'язання задачі дослідимо рух тіла *M*. Оскільки розміри тіла *M* не впливають на результати задачі, його можна вважати матеріальною точкою (рис. 2.2).

Введемо вісь координат *Ox*, напрямлену вертикально вниз. Початок відліку *O* осі розташуємо в положенні статичної рівноваги тіла *M*, тобто в положенні, у якому сила ваги нерухомого тіла зрівноважується силою пружності.

Зобразимо тіло *M* на додатніх значеннях координатної осі *Ox* і вважатимемо, що воно рухається у додатньому напрямку осі *Ox*.

Вкажемо сили, які прикладаються до тіла *M*: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$ та сила опору $\vec{R}$ (рис. 2.2). Оскільки пружина для зображеного положення тіла *M* розтягнена, сила пружності напрямлена вгору. Сила опору спрямована протилежно до напрямку руху тіла.

Величина сили пружності, згідно закону Гука, пропорційна деформації пружини Δl і дорівнює $F_{\text{пр}} = c \cdot \Delta l$. Деформацію пружини (подовження) визначаємо як різницю між поточною довжиною пружини l і довжиною пружини в ненавантаженому стані l_0, тобто $\Delta l = l - l_0$ (рис. 2.3). Поточна довжина пружини l, як випливає з рисунка, складається з довжини ненапруженої пружини l_0, статичної деформації $\Delta l_{\text{ст}}$ до положення статичної рівноваги від дії сили ваги тіла *M* та деформації, яка викликається переміщенням тіла *M* від точки *O* і яка дорівнює його поточній координаті *x*. Тобто маємо співвідношення

$$l = l_0 + \Delta l_{\text{ст}} + x.$$

Тоді деформація пружини дорівнює

$$\Delta l = l - l_0 = \Delta l_{\text{ст}} + x,$$

а величина сили пружності

$$F_{\text{пр}} = c(\Delta l_{\text{ст}} + x). \qquad (1)$$

За основним законом динаміки точки запишемо

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{R}.$$

Після проектування на вісь *Ox* отримаємо

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{пр}} - R. \qquad (2)$$

Далі у вираз (2) підставимо залежність (1) для сили пружності і запишемо вираз для сили опору через координату ($\mathrm{v} = \dot{x}$):

$$m\ddot{x} = mg - c(\Delta l_{\text{ст}} + x) - \beta\dot{x}. \qquad (3)$$

Рівняння (3) можна спростити, використовуючи умову статичної рівноваги тіла *M* на пружині. У цьому випадку сила тяжіння тіла *M* зрівноважується силою пружності: $F^{\text{с}}_{\text{пр}} = mg$, де $F^{\text{с}}_{\text{пр}} = c\Delta l_{\text{ст}}$. Тобто умова рівноваги має вигляд

$$c\Delta l_{\text{ст}} = mg\,.$$

Звідси визначаємо статичне подовження пружини

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{mg}{c} \tag{4}$$

і підставляємо його в рівняння (3). Після спрощень маємо

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0\,.$$

Поділивши на m, отримаємо диференціальне рівняння руху тіла M

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{5}$$

де $h = \dfrac{\beta}{2m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$.

Рівняння (5) є звичайним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0\,.$$

Корені цього рівняння записуються у вигляді

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}\,. \tag{6}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (5) залежить від співвідношення між коефіцієнтами h та ω_0. У нашому випадку

$$h = \frac{\beta}{2m} = \frac{32}{2 \cdot 2} = 8 \text{ рад/с}; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{450}{2}} = 15 \text{ рад/с.}$$

Оскільки $h < \omega_0$, то обидва кореня (6) будуть комплексними з від'ємною дійсною частиною. Тоді загальний розв'язок рівняння (5) запишеться у формі

$$x = \mathrm{e}^{-ht}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t)\,, \tag{7}$$

де $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ =12,69 рад/с.

Зауважимо, що у випадку $h > \omega_0$, підкорінний вираз формули (6) буде додатній і загальний розв'язок рівняння (5) запишеться у формі

$$x = \mathrm{e}^{-ht}(C_1\mathrm{e}^{-pt} + C_2\mathrm{e}^{pt}),$$

де $p = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$.

Якщо $h = \omega_0$, то підкорінний вираз формули (6) дорівнює нулю, корені характеристичного рівняння будуть дійсними і рівними, і загальний розв'язок рівняння (5) запишеться у формі

$$x = \mathrm{e}^{-ht}(C_1 t + C_2).$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 знайдемо похідну за часом від розв'язку (7):

$$\dot{x} = -h\mathrm{e}^{-ht}(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t) + \omega_1\mathrm{e}^{-ht}(-C_1\sin\omega_1 t + C_2\cos\omega_1 t). \quad (8)$$

Початкові умови руху точки M, віднесені до осі Ox, такі

$$t_0 = 0, \qquad x(t_0) = x_0 = 0,05 \text{ м}, \qquad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = 0,2 \text{ м/с}.$$

Підставимо початкову умову за координатою у (7), а початкову умову за швидкістю у (8). Тоді при $t = t_0 = 0$ маємо

$$x_0 = 0,05 = C_1, \qquad \dot{x}_0 = 0,2 = -hC_1 + \omega_1 C_2.$$

Звідси C_1=0,05 м, C_2=0,047 м.

Таким чином, закон руху тіла M приймає вигляд

$$x = \mathrm{e}^{-8t}(0,05\cos 12,69t + 0,047\sin 12,69t), \text{ м}.$$

Загальний розв'язок (7) можна також подати у формі

$$x = A\mathrm{e}^{-ht}\sin(\omega_1 t + \alpha),$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0,0688$ м, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{C_1}{C_2} = 0,816$ рад, тобто

$$x = 0,0688\mathrm{e}^{-8t}\sin(12,69t + 0,816) \text{ м}.$$

З останнього виразу випливає, що тіло M здійснює згасаючі коливання з періодом $T_к = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}$=0,495 с.

ВідповідЬ: $x = 0{,}0688\mathrm{e}^{-8t}\sin(12{,}69t + 0{,}816)$ м.

Приклад 2.2. До нижнього кінця вертикальної пружини з коефіцієнтом жорсткості c=39,2 Н/м прикріплене тіло M масою m=0,4 кг (рис. 2.4). На тіло діє збурювальна сила $Q(t)$, яка змінюється за законом $Q(t) = Q_0 \sin\omega t$, де $Q_0 = 0{,}04$ Н, ω=6 рад/с. Знайти закон руху тіла M, якщо у початковий момент часу воно було нерухоме і знаходилось у положенні рівноваги.

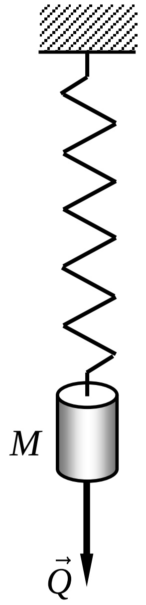


Рис.2.4

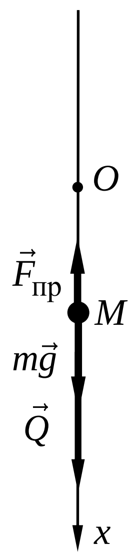


Рис.2.5

Р о з в ’ я з а н н я. У даній задачі тіло M можна вважати матеріальною точкою, оскільки рух тіла прямолінійний і поступальний.

Введемо вісь Ox, напрямлену вниз. Початок відліку O розмістимо у положенні статичної рівноваги точки M, яке вона займає при нерухомому нижньому кінці пружини.

Зобразимо точку M в поточному положенні на додатніх значеннях координатної осі Ox, і вважатимемо, що в даному положенні вона рухається в бік додатніх значень осі координат.

Вкажемо сили, прикладені до точки M: сила тяжіння $m\vec{g}$, збурювальна сила $Q(t)$ і сила пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$ (рис. 2.5). Оскільки пружина для вказаного положення точки M розтягується, то сила пружності напрямлена вгору. Величина сили пружності дорівнює

$$F_{\text{пр}} = c \cdot \Delta l\,, \tag{1}$$

де Δl – деформація пружини. Визначимо цю деформацію як різницю між довжиною в ненапруженому стані та поточною довжиною: $\Delta l = l_0 - l$.

Використовуючи результати попереднього прикладу та рис. 2.3, можна записати

$$\Delta l = l_0 - l = x + \Delta l_{\text{ст}}\,.$$

Тоді вираз для величини сили пружності перепишеться так

$$F_{\text{пр}} = c \cdot \Delta l = c(x + \Delta l_{\text{ст}})\,. \tag{2}$$

На підставі основного закону динаміки точки запишемо динамічне рівняння руху у формі

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{пр}} + \vec{Q}\,.$$

Спроектуємо це рівняння на вісь Ox

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{пр}} + Q$$

і підставимо в нього вираз (2)

$$m\ddot{x} = mg - c(x + \Delta l_{\text{ст}}) + Q\,. \tag{3}$$

Спростимо рівняння (3) використовуючи умову статичної рівноваги точки M на пружині:

$$mg - c\Delta l_{\text{ст}} = 0\,. \tag{4}$$

Звідси визначаємо статичне подовження пружини

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}. \qquad (5)$$

Підставимо (5) у рівняння (3) і поділимо на масу. Отримаємо

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Q/m$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{Q_0}{m}\sin\omega t, \qquad (6)$$

де $\omega_0^2 = c/m$.

Диференціальне рівняння (6) є диференціальним рівнянням змушених коливань, оскільки його права частина містить періодичну функцію часу.

Загальний розв’язок цього неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами шукаємо як суму загального розв’язку відповідного однорідного рівняння у формі

$$x_1 = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t \qquad (7)$$

та частинного розв’язку неоднорідного рівняння, форма якого залежить від співвідношення частоти вільних коливань ω_0 та частоти ω. У нашому випадку $\omega_0 = \sqrt{c/m} = 9{,}89$ рад/с, тобто не дорівнює ω=6 рад/с. Тоді частинний розв’язок шукаємо у формі

$$x_2 = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t. \qquad (8)$$

Зауважимо, що у випадку $\omega = \omega_0$ рівності частоти вільних коливань ω_0 та частоти збурювальної сили ω, частинний розв’язок рівняння (6) потрібно шукати у формі

$$x_2 = t(B_1\cos\omega_0 t + B_2\sin\omega_0 t).$$

Оскільки частинний розв’язок має задовольняти відповідне диференціальне рівняння, підставимо вираз (8) у рівняння (6):

$$-\omega^2 B_1\cos\omega t - \omega^2 B_2\sin\omega t + \omega_0^2 B_1\cos\omega t + \omega_0^2 B_2\sin\omega t = \frac{Q_0}{m}\sin\omega t \qquad (9)$$

і зберемо коефіцієнти при $\cos\omega t$ і $\sin\omega t$ в лівій та правій частинах співвідношення (9):

$$-\omega^2 B_1 + \omega_0^2 B_1 = 0, \qquad -\omega^2 B_2 + \omega_0^2 B_2 = \frac{Q_0}{m}.$$

З цих рівнянь отримаємо

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{Q_0}{m}.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд

$$x = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{Q_0}{m} \sin\omega t. \qquad (10)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 знайдемо похідну за часом від розв'язку (10):

$$\dot{x} = -\omega_0 C_1 \sin\omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos\omega_0 t + \omega \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{Q_0}{m} \cos\omega t. \qquad (11)$$

Оскільки точка *M* в початковий момент часу знаходилась в положенні статичної рівноваги і була нерухомою, маємо нульові початкові умови:

$$t_0 = 0, \qquad x(t_0) = x_0 = 0, \qquad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 = 0.$$

Підставимо початкові умови у вирази (10) та (11)

$$0 = C_1, \qquad 0 = \omega_0 C_2 + \omega \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \frac{Q_0}{m}.$$

Звідси $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \dfrac{Q_0}{m}$. Враховуючи числові дані задачі, отримаємо

$$x = -3{,}83 \cdot 10^{-2} \sin 9{,}89t + 6{,}32 \cdot 10^{-2} \sin 6t, \text{ м.}$$

Перший доданок отриманого розв'язку відповідає коливанням з частотою вільних коливань, другий – змушеним коливанням точки *M*.

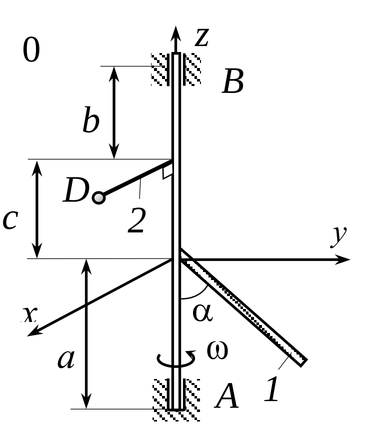
Відповідь: $x = -3{,}83 \cdot 10^{-2} \sin 9{,}89t + 6{,}32 \cdot 10^{-2} \sin 6t$, м.

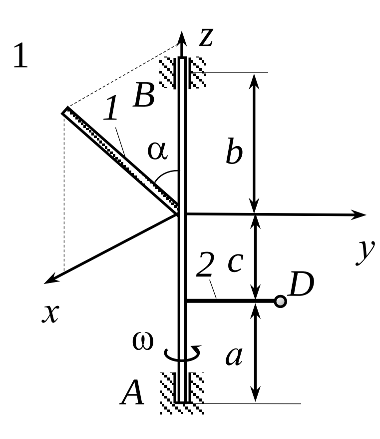
Завдання 3. Застосування принципу Д'Аламбера для дослідження динаміки системи матеріальних точок

Вертикальний вал *AB* з прикріпленим до нього стрижнем 1 маси m_1 і невагомим стрижнем 2 довжини l_2 з матеріальною точкою масою m_2 обертається з постійною кутовою швидкістю ω. Однорідний стрижень 1 довжини l_1 кріпиться до валу під кутом α і знаходиться в площині, перпендикулярній до осі стрижня 2. Знайти реакції в опорах валу *AB*, а також визначити внутрішнє осьове зусилля у стрижні 1 в перерізі, який знаходиться на відстані *h* від місця його закріплення на валу *AB*, а також осьове зусилля в місці кріплення стрижня 1 до валу. Розміри тіл та їх маси наведено в таблиці.

Таблиця 3

Варіант	m_1, кг	m_2, кг	l_1, м	l_2,м	*a*, м	*b*, м	*c*, м	*h*, м	ω, рад/с	α, град
0	3	2	0,8	0,5	0,4	0,5	0,2	0,1	5	30
1	6	4	1,2	0,8	0,5	0,3	0,4	0,3	6	45
2	4	3	1	0,6	0,6	0,1	0,5	0,2	10	60
3	3,5	1,5	0,9	0,7	0,2	0,4	0,7	0,4	3	45
4	5	4	0,7	0,4	0,5	0,6	0,1	0,2	12	30
5	4,5	2	1	0,5	0,4	0,3	0,3	0,5	8	60
6	5	3	0,8	1	0,7	0,1	0,2	0,4	9	45
7	2	1	0,5	0,3	0,2	0,5	0,4	0,1	15	30
8	6	3,5	0,6	0,8	0,3	0,2	0,6	0,2	14	45
9	4	1	0,9	0,7	0,1	0,6	0,5	0,3	7	60





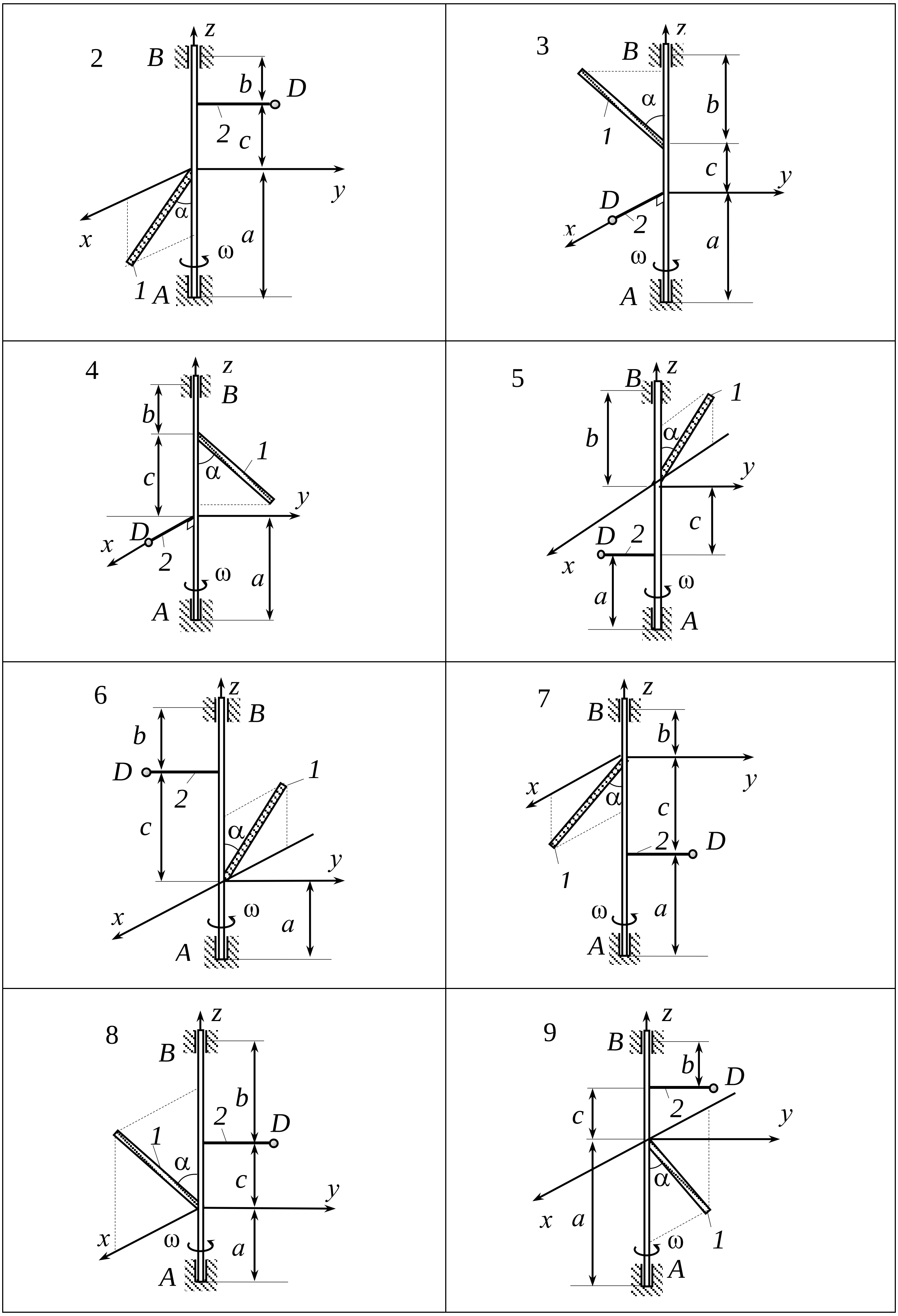

2
z
B
b
D
2
c
y
x
α
a
ω
1
A
3
z
B
b
α
1
c
y
D
2
x
a
ω
A
4
z
B
b
1
c
α
y
x
D
2
ω
a
A
5
B
z
1
b
α
y
c
x
D
2
ω
a
A
6
z
B
b
D
2
1
c
α
y
x
ω
a
A
7
B
z
b
x
y
α
c
2
D
1
ω
a
A
8
z
B
b
2
D
1
α
c
y
x
ω
a
A
9
z
B
b
D
c
2
y
α
x
a
1
ω
A

Рис.3.1

Приклад 3.1. Вертикальний вал *AB* з прикріпленим до нього стрижнем 1 маси $m_1 = 4$ кг і невагомим стрижнем 2 довжини $l_2 = 0{,}5$ м з матеріальною точкою масою $m_2 = 2$ кг обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 10$ рад/с. Однорідний тонкий стрижень 1 довжини $l_1 = 0{,}4$ м кріпиться до валу під кутом $\alpha = 60^\circ$ і знаходиться в площині, перпендикулярній до осі стрижня 2. Інші розміри a=0,4 м, b=0,2 м, c=0,3м. Знайти реакції в опорах валу *AB*, а також визначити внутрішнє осьове зусилля у стрижні 1 в перерізі, який знаходиться на відстані $h = 0{,}1$ м від місця його закріплення на валу *AB*, а також осьове зусилля в місці кріплення стрижня 1 до валу (рис. 3.2).

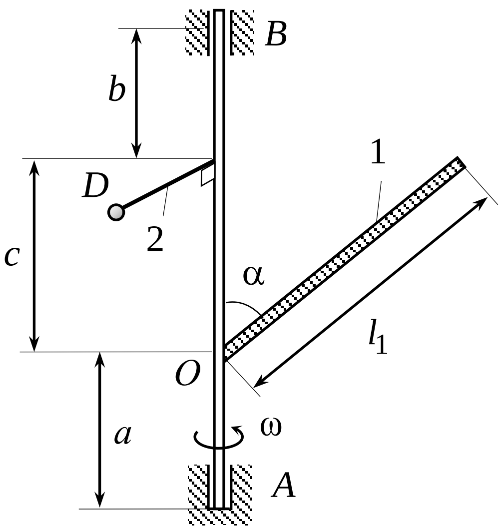


Рис. 3.2

Розв'язання. Визначимо реакції опор *A* і *B*. Зв'яжемо жорстко з матеріальною системою рухому систему координат *Axyz* (рис. 3.3), а також позначимо активні сили $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, що діють на тіло. Відповідно до аксіоми про звільнення від в'язей відкинемо підшипник в точці *B* і підп'ятник в точці *A* і замінимо їх дію на тіло відповідними реакціями в'язей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$.

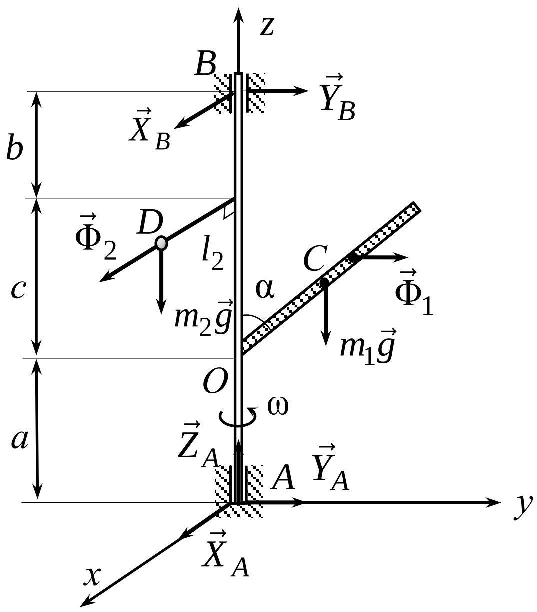


Рис. 3.3

До центрів мас кожного з елементів, які складають матеріальну систему, умовно прикладемо у напрямку, протилежному складовим їхніх прискорень, сили інерції:

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{w}_C; \qquad \vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{w}_D.$$

Оскільки тіло здійснює рівномірне обертання навколо осі Az, то обертальні складові прискорень центрів мас дорівнюють нулеві, таким чином прискорення містять лише осьову складову:

$$\Phi_1 = m_1 w_{Cn}; \qquad \Phi_2 = m_2 w_{Dn}.$$

Прискорення відповідних центрів мас:

$$w_{Cn} = \omega^2 R_C; \qquad w_{Dn} = \omega^2 R_D,$$

де R_C, R_D – радіуси обертання центрів мас елементів системи C і D. Враховуючи, що радіуси обертання цих центрів

$$R_C = \frac{l_1}{2}\sin\alpha; \qquad R_D = l_2,$$

сили інерції запишемо у вигляді:

$$\Phi_1 = m_1 \omega^2 \frac{l_1}{2}\sin\alpha; \qquad \Phi_2 = m_2 \omega^2 l_2. \tag{1}$$

Рівняння, які виражають принцип Д'Аламбера мають вигляд:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{R}^e + \vec{\Phi} = 0 \\ \vec{M}_O^F + \vec{M}_O^R + \vec{M}_O^\Phi = 0 \end{cases}$$

де $\vec{F}$ і $\vec{M}_O^F$ – відповідно головний вектор активних сил і головний момент активних сил, $\vec{R}^e$ і $\vec{M}_O^R$ – головний вектор реакцій зовнішніх в'язей і головний момент реакцій зовнішніх в'язей, $\vec{\Phi}$ і $\vec{M}_O^\Phi$ – головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції.

Запишемо проекції цих рівнянь на осі системи координат для нашої задачі:

$$X_A + X_B + \Phi_2 = 0;$$

$$Y_A + Y_B + \Phi_1 = 0;$$

$$Z_A - m_1 g - m_2 g = 0; \qquad (2)$$

$$M_x(\vec{\Phi}_1) - m_1 g \frac{l_1}{2} \sin\alpha - Y_B(a+b+c) = 0;$$

$$\Phi_2(a+c) + m_2 g l_2 + X_B(a+b+c) = 0.$$

Визначимо $M_x(\vec{\Phi}_1)$ – момент сили інерції $\vec{\Phi}_1$ відносно осі Ax. Елементарна сила інерції $d\Phi_1$, що діє на елемент стрижня ds (рис. 3.4):

$$d\Phi_1 = dm_1 \omega^2 s \sin\alpha. \qquad (3)$$

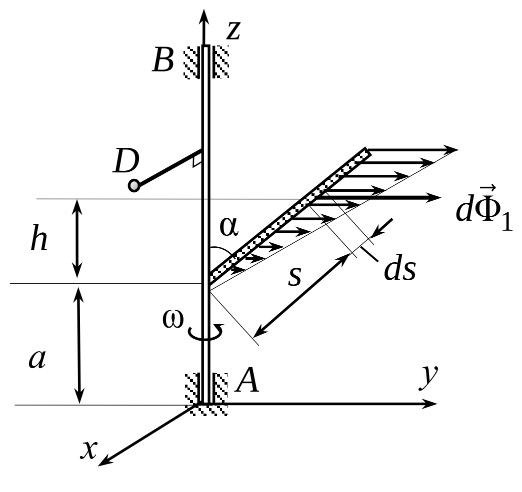


Рис. 3.4

Елементарна маса $dm_1 = \gamma_1 ds$, де γ_1 – погонна маса тонкого стрижня.

Після підстановки dm_1 в (3) маємо:

$$d\Phi_1 = \gamma_1\omega^2 \sin\alpha \cdot sds\,.$$

Елементарний момент $dM_x(\vec{\Phi}_1)$ відносно осі Ax:

$$dM_x(\vec{\Phi}_1) = d\Phi_1(a + s\cos\alpha) = \gamma_1\omega^2 \sin\alpha(a + s\cos\alpha)sds \qquad (4)$$

Інтегруючи (3.4), отримаємо:

$$M_x(\vec{\Phi}_1) = \gamma_1\omega^2 \sin\alpha \int_0^{l_1} (a + s\cos\alpha)sds = \gamma_1\omega^2 \sin\alpha \left(a\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3}\cos\alpha \right)\Bigg|_0^{l_1} =$$

$$= \gamma_1\omega^2 \sin\alpha \left(a\frac{l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{3}\cos\alpha \right).$$

Приймемо до уваги, що $\gamma_1 = \dfrac{m_1}{l_1}$, тоді момент $M_x(\vec{\Phi}_1)$ можна переписати наступним чином:

$$M_x(\vec{\Phi}_1) = m_1\omega^2 \sin\alpha \left(a\frac{l_1}{2} + \frac{l_1^2}{3}\cos\alpha \right). \qquad (5)$$

Підставляючи числові значення, маємо:

$$m_1\omega^2 \sin\alpha \left(a\frac{l_1}{2} + \frac{l_1^2}{3}\cos\alpha \right) = 4 \cdot 10^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(0,4\frac{0,4}{2} + \frac{0,4^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = 34,6 \text{ Нм.}$$

Визначимо з (1) сили інерції:

$$\Phi_1 = m_1\omega^2 \frac{l_1}{2}\sin\alpha = 4 \cdot 100 \cdot \frac{0,4}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 69,3 \text{ Н;}$$

$$\Phi_2 = m_2\omega^2 l_2 = 2 \cdot 100 \cdot 0,5 = 100 \text{ Н.}$$

З системи (2) дістанемо реакції опор:

$$X_B = -\frac{\Phi_2(a + c) + m_2 g l_2}{(a + b + c)} = \frac{100 \cdot (0,4 + 0,3) + 2 \cdot 9,8 \cdot 0,5}{0,9} = -88,7 \text{ Н;}$$

$$Y_B = \frac{M_x(\vec{\Phi}_1) - m_1 g \dfrac{l_1}{2}\sin\alpha}{(a+b+c)} = \frac{34,6 - 4\cdot 9,8\cdot \dfrac{0,4}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{0,9} = 30,9 \text{ Н};$$

$$Z_A = m_1 g + m_2 g = 6\cdot 9,8 = 58,8 \text{ Н};$$

$$X_A = -X_B - \Phi_2 = 88,7 - 100 = -11,3 \text{ Н};$$

$$Y_A = -Y_B - \Phi_1 = -30,9 - 69,3 = -100,2 \text{ Н}.$$

Для визначення внутрішнього осьового зусилля в стрижні в перерізі, що знаходиться на відстані h від місця кріплення стрижня на осі, розріжемо умовно стрижень і в місці перерізу умовно прикладемо осьове зусилля $\vec{N}$. Розглянемо елементарну частинку завдовжки ds справа від перерізу (рис. 3.5).

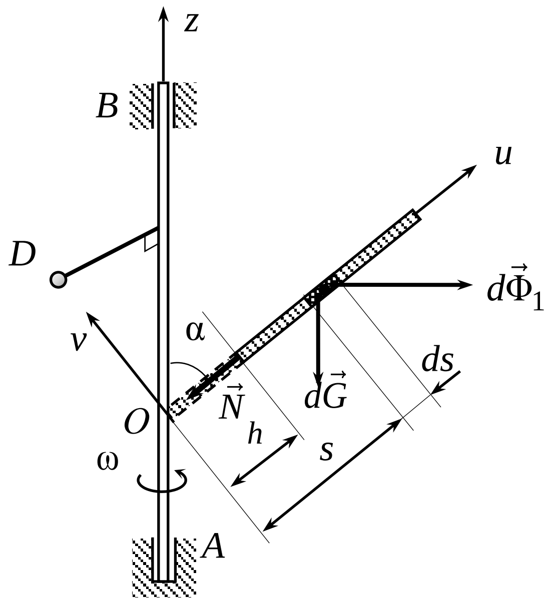


Рис. 3.5

Маса елементарної частинки $dm_1 = \dfrac{m_1}{l_1}ds$. На неї діє сила тяжіння $d\vec{G} = \vec{g}dm = \vec{g}\dfrac{m_1}{l_1}ds$. До цієї сили слід додати елементарну силу інерції $d\vec{\Phi}_1 = -\vec{w}dm_1$, значення якої: $d\Phi_1 = \dfrac{m_1}{l_1}\omega^2 \sin\alpha \cdot s ds$.

Введемо систему координат Ouv, рівняння кінетостатики в проекції на вісь Ou буде мати вигляд:

$$\sum_i F_{iu} = -N - \int dG \cdot \cos\alpha + \int d\Phi_1 \cdot \sin\alpha = 0\,,$$

звідки

$$N = -\int dG \cdot \cos\alpha + \int d\Phi_1 \cdot \sin\alpha\,.$$

Обрахуємо кожен доданок окремо:

$$\int dG \cdot \cos\alpha = \frac{m_1 g}{l_1}\cos\alpha \int_h^{l_1} ds = \frac{m_1 g}{l_1}\cos\alpha \cdot s\Big|_h^{l_1} = \frac{m_1 g}{l_1}\cos\alpha (l_1 - h)\,;$$

$$\int d\Phi_1 \cdot \sin\alpha = \frac{m_1}{l_1}\omega^2 \sin^2\alpha \int_h^{l_1} sds = \frac{m_1}{l_1}\omega^2 \sin^2\alpha \frac{s^2}{2}\Big|_h^{l_1} = \frac{m_1}{l_1}\omega^2 \sin^2\alpha \frac{(l_1^2 - h^2)}{2}\,.$$

Отже, знайдемо осьове зусилля в перерізі:

$$N = \frac{m_1}{l_1}\omega^2 \sin^2\alpha \frac{(l_1^2 - h^2)}{2} - \frac{m_1 g}{l_1}\cos\alpha (l_1 - h) =$$

$$= \frac{4}{0,4}100\frac{3}{4}\frac{(0,4^2 - 0,1^2)}{2} - \frac{4 \cdot 9,8}{0,4}\frac{1}{2}(0,4 - 0,1) = 41,55 \text{ Н.}$$

Знайдемо внутрішнє осьове зусилля в місці кріплення стержня до осі (при $h = 0$):

$$N = \frac{m_1 l_1}{2}\omega^2 \sin^2\alpha - m_1 g\cos\alpha = \frac{4 \cdot 0,4}{2}100\frac{3}{4} - 4 \cdot 9,8\frac{1}{2} = 40,4 \text{ Н.}$$

Відповідь: $X_B = -88,7$ Н, $Y_B = 30,9$ Н, $Z_A = 58,8$ Н, $X_A = -11,3$ Н, $Y_A = -100,2$ Н, $N = 40,4$ Н.

Завдання № 4. Застосування диференціальних рівнянь до дослідження руху механічної системи.

Механічна система, що складається з трьох тіл, починає рухатись зі стану спокою під дією сил тяжіння. Скласти диференціальні рівняння руху тіл та знайти залежність від часу координати вказаної у таблиці 4: $s_1(t)$ – переміщення тіла 1, $\varphi_2(t)$ – кут повороту тіла 2, $s_3(t)$ – переміщення центру O_3 блока 3, $\varphi_3(t)$ – кут повороту тіла 3. Визначити також значення сили тертя при русі тіла 3 по шорсткій площині.

Схеми механізмів подано на рис. 4.1. Дані для розв'язання задачі наведено в табл.4, де через m_1, m_2, m_3 позначено маси тіл. Радіуси великих та малих кіл блоків 2 та 3 позначено через R_2, R_3, r_2, r_3. Радіуси інерції цих блоків відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центри, позначено i_2, i_3. Блоки, які на рисунку зображено одним колом, вважати суцільними однорідними циліндрами з радіусом R_2 або R_3, відповідно до номера тіла. Через f позначено коефіцієнт тертя ковзання, δ – коефіцієнт тертя кочення.

При виконанні завдання масами ниток знехтувати.

Графічний матеріал повинен складатися з наступних рисунків: загальний вигляд схеми механізму; рисунки окремих тіл системи з вказанням прикладених сил; схема механізму з вказанням швидкостей тіла 1, центру блока 3 та точок дотику ниток до блоків 2 та 3.

Таблиця 4.

Варіант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	i_2, см	i_3, см	f	δ, см	Шукана координата
0	*3m*	*2m*	*2m*	20	10	20	10	15	15	0,30	0,15	$s_3(t)$
1	*2m*	*3m*	*m*	25	10	20	10	20	15	0,25	0,20	$\varphi_2(t)$
2	*3m*	*m*	*4m*	30	15	30	20	20	25	0,20	0,10	$s_1(t)$
3	*2m*	*4m*	*m*	20	10	30	15	15	20	0,25	0,20	$\varphi_3(t)$
4	*m*	*2m*	*5m*	40	20	50	25	30	40	0,35	0,10	$s_1(t)$
5	*m*	*m*	*4m*	30	20	30	15	25	20	0,25	0,05	$s_3(t)$
6	*4m*	*3m*	*2m*	30	15	40	20	20	30	0,30	0,10	$\varphi_2(t)$
7	*2m*	*4m*	*4m*	40	30	30	20	30	25	0,25	0,10	$s_1(t)$
8	*4m*	*2m*	*4m*	30	10	30	20	20	25	0,35	0,10	$\varphi_3(t)$
9	*3m*	*4m*	*2m*	30	20	30	10	20	25	0,25	0,10	$s_3(t)$

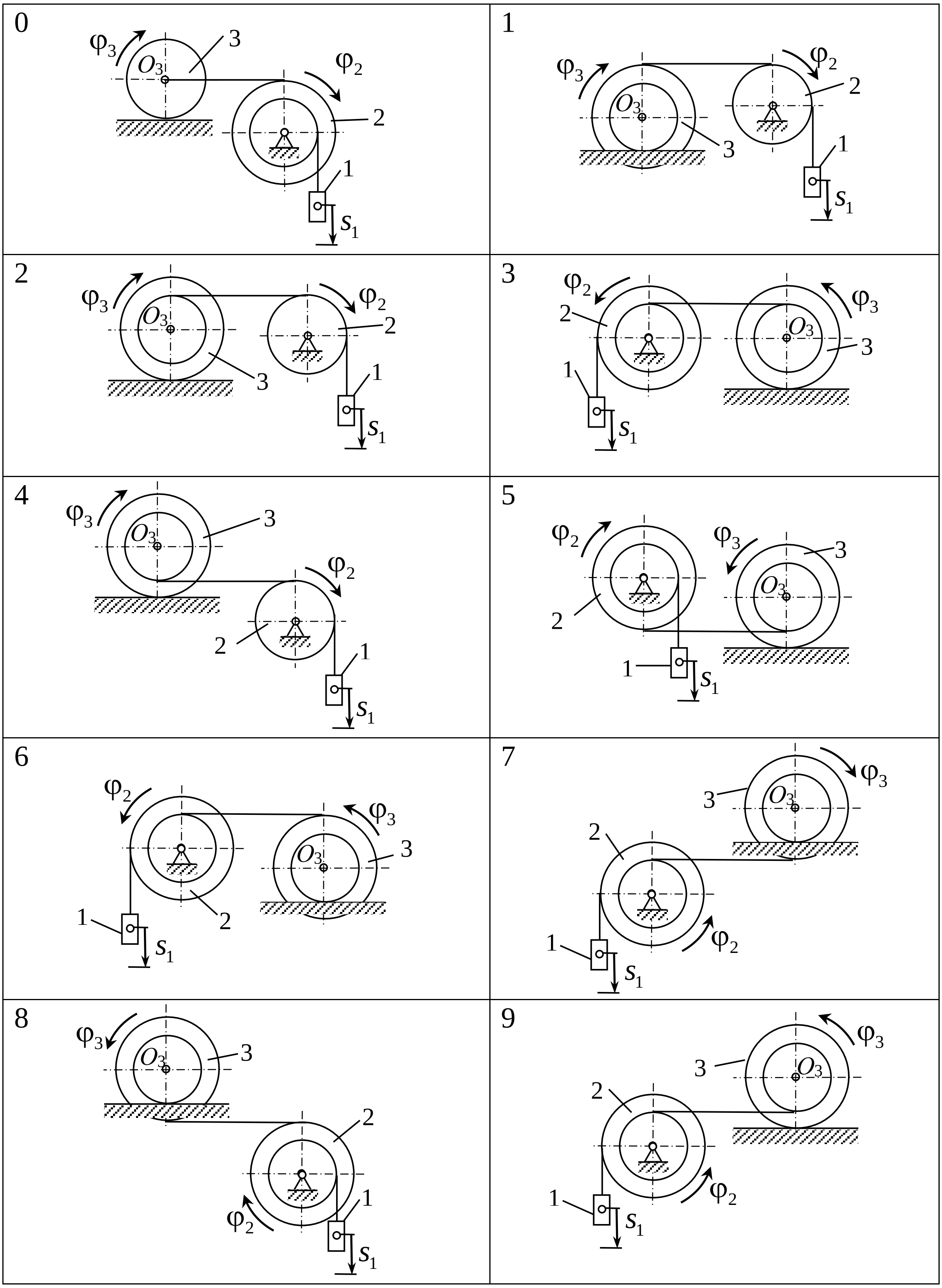

0
φ3 O3 3 φ2 2 1 s1
1
φ3 O3 3 φ2 2 1 s1
2
φ3 O3 3 φ2 2 1 s1
3
φ2 2 1 s1 φ3 O3 3
4
φ3 O3 3 φ2 2 1 s1
5
φ2 2 φ3 O3 3 1 s1
6
φ2 2 1 s1 φ3 O3 3
7
φ3 O3 3 2 1 s1 φ2
8
φ3 O3 3 2 1 φ2 s1
9
φ3 O3 3 2 1 s1 φ2

Рис. 4.1

Приклад 4. Вантаж 1 масою $m_1=m$ прикріплено до невагомої нерозтяжної нитки (рис. 4.2), яка перекидається через великий радіус блока 2 масою $m_2=2m$. Нитка, яка сходить з малого радіуса блока 2 навита на колесо 3 масою $m_3=m$. Рухаючись вниз, вантаж 1 змушує котитись без ковзання колесо 3. Радіуси великого та малого кіл блока 2 відповідно дорівнюють $R_2=2r$, $r_2=r$. Радіус колеса дорівнює $R_3=2r$. Коефіцієнт тертя кочення колеса 3 дорівнює $\delta = 0{,}02r$, коефіцієнт тертя $f = 0{,}1$, радіус інерції блока 2 відносно горизонтальної осі $i_2 = r\sqrt{2}$. Скласти диференціальне рівняння руху системи в залежності від швидкості вантажа 1. Знайти залежність від часу швидкості та переміщення s_1 вантажа 1. У початковий момент система була у спокої. Колесо 3 вважати однорідним суцільними циліндром.

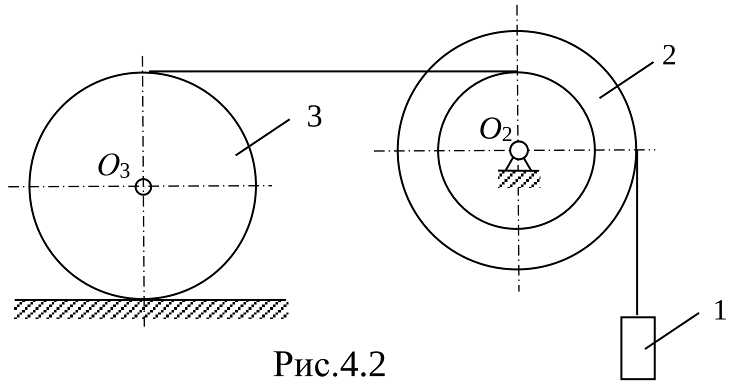


Рис.4.2

Р о з в ’ я з а н н я. Об’єктом дослідження задачі є механічна система, яка складається з трьох тіл.

Для розв’язання задачі скористаємось загальними теоремами динаміки та складемо динамічні (диференціальні) рівняння руху кожного тіла окремо проводячи відповідні перерізи.

Спочатку проведемо переріз через нитку, яка з’єднує тіло 1 та 2 і розглянемо тіло 1 окремо (рис. 4.3). Це тіло виконує поступальний рух при якому його розмірами можна нехтувати. Застосовуючи другий закон Ньютона, у векторному вигляді отримаємо:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_{12},$$

де $m_1\vec{g}$ - сила тяжіння, $\vec{T}_{12}$ - сила натягу відкинутої в’язі (нитки).

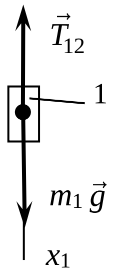


Рис. 4.3

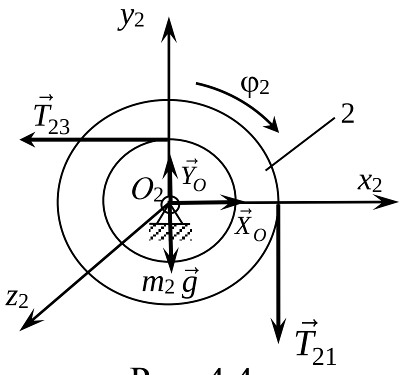


Рис. 4.4

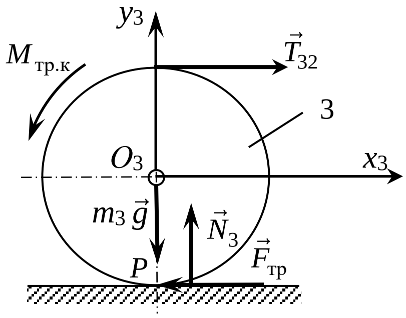


Рис. 4.5

У проекції на вісь O_1x_1, яка напрямлена вниз за рухом тіла 1, маємо

$$m_1\dot{\text{v}}_1 = m_1 g - T_{12}\,. \tag{1}$$

Рівняння обертального руху блока 2 навколо нерухомої осі отримаємо (рис. 4.4), скориставшись теоремою про зміну кінетичного момента:

$$\frac{d}{dt}K_Z = \sum_{i=1}^{n} M_Z(\vec{F}_i)\,,$$

де $K_Z = I_Z\omega_Z$ - кінетичний момент твердого тіла відносно осі обертання O_2z_2, $\sum_{i=1}^{n} M_Z(\vec{F}_i)$ - сума моментів сил, прикладених до тіла, відносно осі O_2z_2.

Зазначимо, що вектор кутової швидкості блока 2 напрямлений протилежно до додатнього напряму координатної осі O_2z_2 системи координат $O_2x_2y_2z_2$, зв’язаної з блоком, оскільки обертання блока відбувається за стрілкою годинника. Внаслідок цього кінетичний момент блока 2 буде від’ємним і його диференціальне рівняння руху запишеться так:

$$-I_2\dot{\omega}_2 = r_2T_{23} - R_2T_{21}\,. \tag{2}$$

Тут $I_2 = m_2 i_2^2 = 2m_2r^2$ - момент інерції блока 2 відносно його осі обертання O_2z_2, $\vec{T}_{21}$ та $\vec{T}_{23}$ - сили натягу відкинутих в’язей. Зазначимо, що сила тяжіння $m_2\vec{g}$ та складові реакції шарніра $\vec{X}_O$, $\vec{Y}_O$ не створюють моментів відносно осі O_2z_2.

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух (рис. 4.5). Диференціальні рівняння такого руху тіла запишемо на підставі теореми про рух центра мас та теореми про зміну кінетичного момента відносно центра мас:

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i , \qquad \frac{d}{dt} K_{z_C} = \sum_{i=1}^{n} M_{z_C}(\vec{F}_i),$$

$\vec{a}_C$ – прискорення центра мас, z_C – вісь, яка проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини руху.

Введемо осі системи координат $O_3x_3y_3z_3$, точка O_3 якої збігається з центром мас C тіла 3 ($\vec{a}_C = \vec{a}_{O_3}$), вісь O_3x_3 напрямлена паралельно опорній площини, а вісь O_3z_3 до читача.

До тіла 3 прикладаються (рис. 4.5): сила тяжіння $m_3\vec{g}$ в центрі мас, сила натягу відкинутої нитки $\vec{T}_{32}$, сила тертя зчеплення $\vec{F}_{\text{тр}}$ та нормальна складова реакції опорної площини $\vec{N}_3$. Вважаємо силу тертя напрямлену вздовж від'ємних значень осі O_3x_3. Якщо це не так, то в ході розв'язання задачі ми отримаємо значення сили тертя інше за знаком. Тоді потрібно змінити напрям цієї сили і розв'язати задачу з урахуванням її нового напряму.

Оскільки колесо 3 та опорна площина не є абсолютно жорсткими, нормальна складова реакції опорної площини зміщена у напрямку руху центра колеса вперед на відстань δ, яка називається коефіцієнт тертя кочення. Тоді ця нормальна складова реакції та складова сили тяжіння, яка перпендикулярна до опорної площини (у прикладі ця складова збігається з самою силою тяжіння), утворюють пару сил $(\vec{N}_3,\, m_3\vec{g}_{y_3})$ з плечем δ, момент якої називають моментом тертя кочення:

$$M_{\text{тр.к}} = \delta N_3 = \delta (m_3\vec{g})_{y_3} .$$

Враховуючи напрямки сил, рівняння руху центра мас тіла 3 в проекціях на осі $O_3x_3y_3$ приймають вигляд:

$$m_3\dot{v}_3 = T_{32} - F_{тр}, \tag{3}$$

$$0 = N_3 - m_3 g. \tag{4}$$

Оскільки колесо 3 обертається за стрілкою годинника, диференціальне рівняння його обертального руху запишеться так:

$$-I_3\dot{\omega}_3 = -R_3T_{32} + \delta m_3 g - R_3F_{тр}, \tag{5}$$

де $I_3 = \frac{1}{2}m_3R_3^2$ - момент інерції однорідного колеса 3 відносно осі O_3z_3.

Як відомо, при коченні колеса 3 з проковзуванням величина сили тертя $F_{тр}$ буде дорівнювати її граничному значенню

$$F_{тр\,\max} = fN_3,$$

де значення N_3 визначається з рівняння (4): $N_3 = m_3 g$.

Будемо вважати, що колесо 3 котиться без проковзування. Тоді точка дотику P є миттєвим центром швидкостей і значення сили тертя, яке у цьому випадку є невідомим, не перевищує її граничне значення $F_{тр} \le F_{тр\,\max} = fN_3$ і визначається з рівнянь (3) та (5).

Після множення рівнянь (2) та (5) на -1, система диференціальних рівнянь руху системи тіл набуває вигляду:

$$\begin{cases} m_1\dot{v}_1 = m_1 g - T_{12}, \\ I_2\dot{\omega}_2 = -r_2T_{23} + R_2T_{21}, \\ m_3\dot{v}_3 = T_{32} - F_{тр}, \\ I_3\dot{\omega}_3 = R_3T_{32} - \delta m_3 g + R_3F_{тр}. \end{cases} \tag{6}$$

Виключимо силу тертя, виразивши її з третього та підставляючи у четверте рівняння системи (6). Одержимо

$$I_3\dot{\omega}_3 = 2R_3T_{32} - \delta m_3 g - R_3m_3\dot{v}_3. \tag{7}$$

Рівняння (6) та (7) утримують невідомі сили натягу. Припускаючи нерозтяжність та невагомість ниток, сили натягу, за третім законом Ньютона, зв'язані залежностями: $\vec{T}_{21} = -\vec{T}_{12}$, $\vec{T}_{23} = -\vec{T}_{32}$. Сили натягу можна виключити з рівнянь руху, враховуючи зв'язок між величинами сил $T_{21}=T_{12}$, $T_{23}=T_{32}$. Виразимо з рівняння (7) силу T_{32}

$$T_{32}=\frac{1}{2R_3}(I_3\dot{\omega}_3+\delta m_3 g+R_3 m_3\dot{v}_3)$$

та підставимо у друге рівняння системи (6). У це ж рівняня підставимо вираз для сили натягу $T_{21}=T_{12}$ з першого рівняння:

$$I_2\dot{\omega}_2=-r_2\frac{1}{2R_3}(I_3\dot{\omega}_3+\delta m_3 g+R_3 m_3\dot{v}_3)+R_2(m_1 g-m_1\dot{v}_1)\,. \tag{8}$$

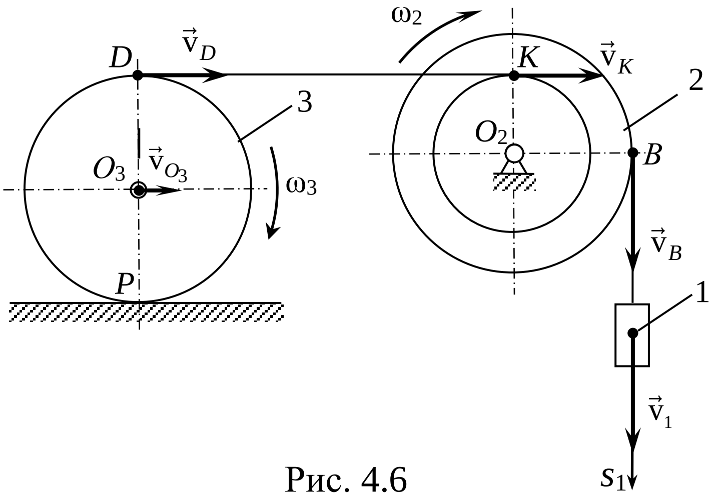


Рис. 4.6

Далі виразимо кутові швидкості ω_2 та ω_3 тіл 2 та 3, а також швидкість точки O_3 через швидкість тіла 1. Оскільки нитки нерозтяжні (рис. 4.6), то $v_B=v_1$, $v_D=v_K$. Враховуючи, що $v_B=\omega_2 R_2$ та $v_K=\omega_2 r_2$, отримаємо

$$\omega_2=\frac{v_B}{R_2}=\frac{v_1}{R_2}, \qquad v_D=v_K=\frac{r_2}{R_2}v_1.$$

Точка P тіла 3 у випадку кочення без ковзання є його миттєвим центром швидкостей, тоді

$$\omega_3=\frac{v_D}{2R_3}, \qquad v_3=v_{O_3}=\frac{1}{2}v_D=\frac{r_2}{2R_2}v_1.$$

Таким чином, кінематичні залежності мають вигляд

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}, \qquad \omega_3 = \frac{r_2}{2R_3R_2}v_1, \qquad v_3 = \frac{r_2}{2R_2}v_1. \tag{9}$$

Після диференціювання за часом одержимо:

$$\dot\omega_2 = \frac{\dot v_1}{R_2}, \qquad \dot\omega_3 = \frac{r_2}{2R_3R_2}\dot v_1, \qquad \dot v_3 = \frac{r_2}{2R_2}\dot v_1. \tag{10}$$

Підставимо формули (10) у рівняння (8), перенесемо усі доданки з прискоренням $\dot v_1$ тіла 1 у ліву частину та поділимо усе рівняння на R_2:

$$\left(m_1 + I_2\frac{1}{R_2^2} + I_3\frac{r_2^2}{4R_3^2R_2^2} + m_3\frac{r_2^2}{4R_2^2}\right)\dot v_1 = m_1 g - \frac{r_2}{2R_2R_3}\delta m_3 g. \tag{11}$$

З урахуванням формул $I_2 = m_2 i_2^2 = 2m_2 r^2$, $I_3 = \frac{1}{2}m_3R_3^2$ для моментів інерції, співвідношень для мас та радіусів кіл, диференціальне рівняння (11) приймає вигляд

$$m\left(2 + \frac{3}{32}\right)\dot v_1 = mg(1 - \frac{1}{8r}\delta),$$

звідки визначаємо прискорення тіла 1

$$\dot v_1 = g(1 - \frac{1}{8r}\delta)\frac{32}{67} = 0,476g. \tag{12}$$

Знайдемо тепер силу тертя зчеплення з двох останніх рівняннь системи (6). З третього рівняння виразимо силу натягу T_{32} та підставимо її у четверте:

$$I_3\dot\omega_3 - R_3m_3\dot v_3 + \delta m_3 g = 2R_3F_{\text{тр}}$$

звідки

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2R_3}\left(I_3\dot\omega_3 - R_3m_3\dot v_3 + \delta m_3 g\right). \tag{13}$$

У останній формулі врахуємо вираз для момента інерції $I_3 = \frac{1}{2}m_3R_3^2$, співвідношення для радіусів та кінематичні залежності (10):

$$F_{\text{тр}} = \frac{m_3}{4}\left(-\frac{1}{2}\dot{\mathrm{v}}_1 + \delta g\right) = -0,0545 m_3 g\,.$$

Розраховане значення сили тертя має від'ємний знак, тобто напрям сили тертя не збігається з вказаним на рисунку 4.5. Зміна знаку при силі тертя зчеплення у рівняннях (3) та (5) на протилежний не вплине на вираз (7), з якого визначається сила натягу T_{32}, і, відповідно, не вплине на значення прискорення $\dot{\mathrm{v}}_1$. Зазначимо також, що знайдене значення сили тертя менше максимального значення $F_{\text{тр max}} = fN_3 = fm_3 g = 0{,}1 m_3 g$, яке приймається силою тертя у випадку проковзування колеса 3. Тобто колесо 3 котиться без проковзування.

Для визначення залежності швидкості тіла 1 від часу інтегруємо вираз (12), який попередньо подаємо так $d\mathrm{v}_1 = 0,476 g dt$:

$$\int d\mathrm{v}_1 = \int 0,476 g dt + C_1.$$

Звідси

$$\mathrm{v}_1 = 0,476 gt + C_1.$$

Оскільки $\mathrm{v}_1 = \frac{ds_1}{dt}$, можна записати: $ds_1 = (0,476 gt + C_1)dt$. Інтегруємо

$$\int ds_1 = \int (0,476 gt + C_1)dt + C_2\,.$$

Отримаємо

$$s_1 = 0,238 gt^2 + C_1 t + C_2\,.$$

З урахуванням нульових початкових умов $s_1(0) = 0,\ \mathrm{v}_1(0) = \dot{s}_1(0) = 0$, маємо

$$\mathrm{v}_1 = 0,476 gt\,, \qquad s_1 = 0,238 gt^2.$$

Відповідь: $\mathrm{v}_1 = 0,476 gt$, $\quad s_1 = 0,238 gt^2$.

Завдання № 5. Застосування теореми про зміну кінетичної енергії до дослідження руху механічної системи.

Механічна система, що складається з чотирьох тіл, починає рухатись зі стану спокою під дією сил тяжіння та пари сил з моментом M сталого значення. Знайти напрям руху тіла 1 та його швидкість в залежності від пройденого шляху, використовуючи теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи.

Схеми механізмів подано на рис. 5.1. Дані для розв’язання задачі наведено в табл. 5, де через m_1, m_2, m_3, m_4 позначено маси тіл. Радіуси великих та малих кіл блоків 2 та 3 позначено через R_2, R_3, r_2, r_3. Для блоків, зображених на рисунку одним колом, з таблиці 5 вибирається значення більшого радіуса (R_2 або R_3). Моменти інерції таких блоків, які є однорідними циліндрами, визначаються виходячи з їх радіусів. Моменти інерції східчастих блоків відносно горизонтальних осей визначаються через радіуси інерції i_2, i_3. Через α позначено кут нахилу похилої шорсткої площини до горизонту, f – коефіцієнт тертя ковзання. У випадку від’ємних значень момента M пари сил, прикладеної до блока 2, напрям момента вважати протилежним до вказаного на рисунку. Параметр r у виразі момента пари сил M прийняти рівним 0,1.

Нитки вважати невагомими та нерозтяжними. Похилі ділянки ниток вважати паралельними до відповідних похилих площин.

Графічний матеріал повинен складатися з наступних рисунків: загальний вигляд схеми механізму; схема механізму з вказанням швидкостей тіл 1 та 4, центру колеса 3 та точок дотику ниток до колеса 2 та 3; схема механізму з вказанням прикладених активних сил та реакцій зовнішніх в’язей.

Таблиця 5.

Варіант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	i_2, см	i_3, см	α	f	M, Н·м
0	$3m$	$2m$	m	m	30	10	20	10	20	15	30	0,10	$15mgr$
1	$2m$	m	m	$2m$	40	20	30	15	30	20	60	0,20	$-5mgr$
2	m	$3m$	m	m	20	10	15	10	15	10	60	0,15	$25mgr$
3	m	$2m$	m	$4m$	25	15	20	10	20	15	45	0,10	$-15mgr$
4	$3m$	$4m$	m	m	15	5	10	5	10	10	60	0,20	$15mgr$
5	$2m$	m	$2m$	$2m$	20	10	15	10	15	15	30	0,05	$-5mgr$
6	$4m$	$2m$	m	m	25	15	20	10	20	15	45	0,10	$20mgr$
7	$3m$	$2m$	m	$5m$	30	20	25	15	20	20	60	0,10	$-10mgr$
8	$4m$	m	m	m	15	5	10	5	10	10	45	0,15	$20mgr$
9	$2m$	$3m$	$2m$	$3m$	40	20	30	15	30	20	30	0,05	$-10mgr$

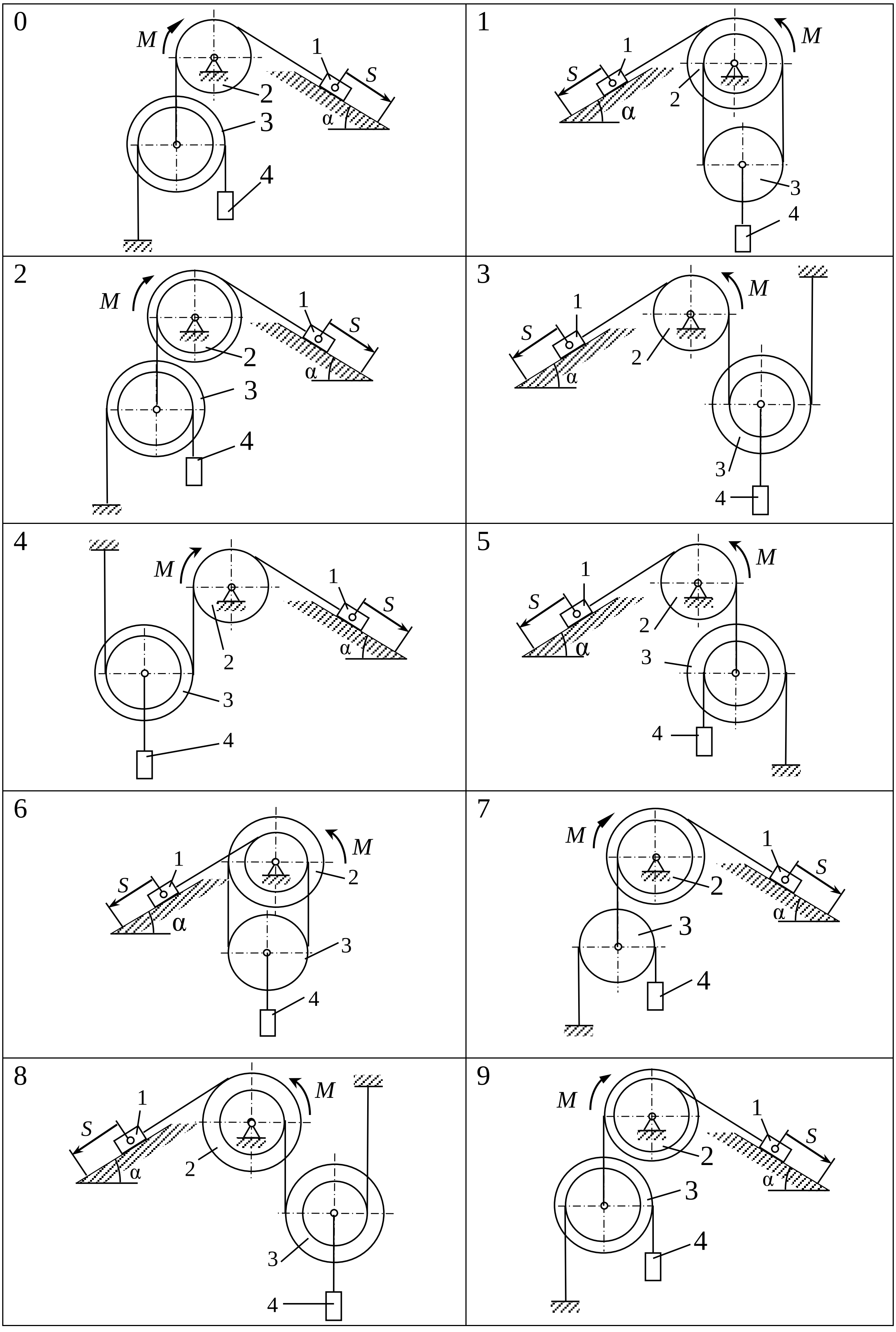

0
M
1
S
2
3
α
4
1
M
1
S
2
α
3
4
2
M
1
S
2
α
3
4
3
M
1
S
2
α
3
4
4
M
1
S
2
α
3
4
5
M
1
S
2
α
3
4
6
M
1
S
2
α
3
4
7
M
1
S
2
α
3
4
8
M
1
S
α
2
3
4
9
M
1
S
2
α
3
4

Рис.5.1

Приклад 5. Вантаж 1 масою m_1=m може ковзати вздовж похилої шорсткої площини ($\alpha = 45^\circ$) і кріпиться до невагомої нерозтяжної нитки (рис. 5.2), яка перекидається через малий радіус блока 2 масою m_2=2m. До блока 2 прикладено пару сил з моментом $M = 2mgr$ (Н/м) сталого значення. Нитка, яка сходить з великого радіуса блока 2 навита на рухомий блок 3 масою m_3=m. Рухаючись вниз, вантаж 1 змушує підніматись блок 3. До центра блока 3 прикріплено на нерозтяжній нитці тіло 4 масою m_4=m. Радіуси великого та малого кіл блока 2 відповідно дорівнюють R_2=2r, r_2=r. Радіус блока 3 дорівнює R_3=2r. Коефіцієнт тертя ковзання f=0,1, радіус інерції блока 2 відносно горизонтальної осі i_2=$r\sqrt{2}$. Блок 3 вважати однорідним суцільними циліндром. Визначити швидкість тіла 1 в залежності від його переміщення s. У початковий момент часу система була у спокої.

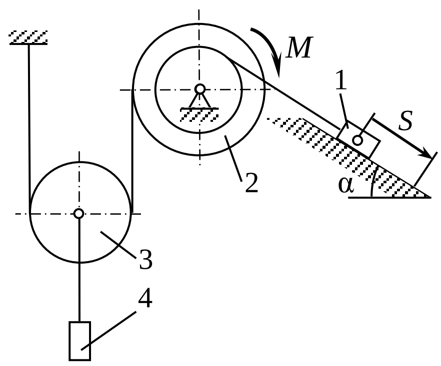


Рис.5.2

Розв'язання. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^{зовн} + \sum_{i=1}^{n} A_i^{внут}.$$

Для розглядуваної системи, яка складається із абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками, сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю: $\sum_{i=1}^{n} A_i^{внут} = 0$.

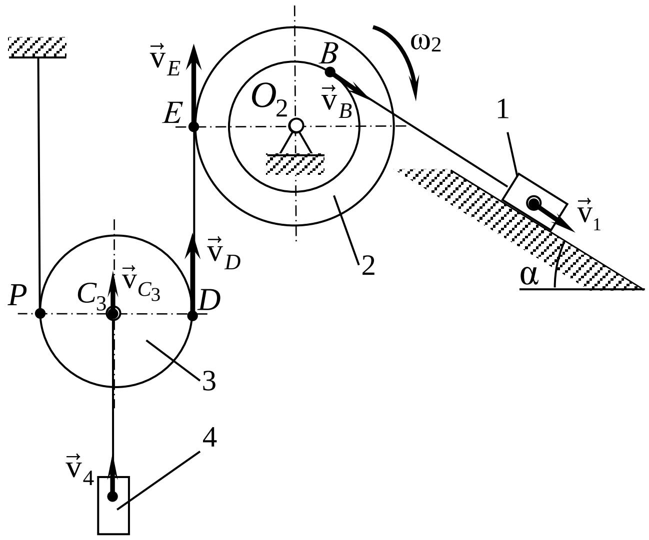


Рис. 5.3.

Крім того, оскільки у початковому положенні система знаходиться в стані спокою, то $T_0 = 0$.

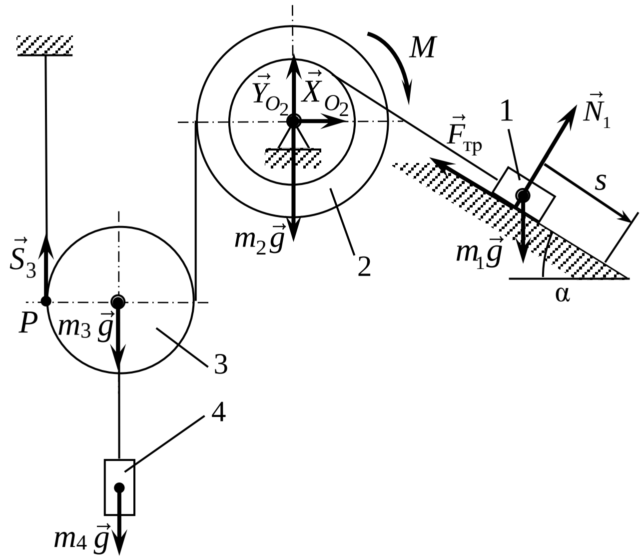


Рис. 5.4.

Кінетична енергія T системи в її кінцевому положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2, 3, 4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4\,.$$

Кінетичну енергію тіла 1, яке рухається поступально (рис. 5.3), виразимо через шукану швидкість

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_1^2 = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_1^2\,.$$

Кінетична енергія блоку 2, який обертається відносно нерухомої осі, подається у вигляді

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2,$$

де I_2 – момент інерції блоку 2 відносно осі обертання. Оскільки блок 2 є східчастим блоком, його момент інерції: $I_2 = m_2 i_2^2 = 2m2r^2 = 4mr^2$. Кутова швидкість ω_2 тіла 2 визначається з умови нерозтяжності нитки $\mathrm{v}_B = \mathrm{v}_1$. Враховуючи, що $\mathrm{v}_B = \omega_2 r_2$, отримаємо $\omega_2 = \frac{\mathrm{v}_1}{r_2} = \frac{\mathrm{v}_1}{r}$. Тоді кінетична енергія блоку 2 дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} 4mr^2 \left(\frac{\mathrm{v}_1}{r} \right)^2 = 2m\mathrm{v}_1^2.$$

Кінетична енергія T_3 блока 3, який здійснює плоский рух, подається так:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \mathrm{v}_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2,$$

де v_{C_3} – швидкість центра мас C_3 блока 3, I_{C_3} – момент інерції блока 3 відносно його центральної осі, яка перпендикулярна до площини рисунка, ω_3 – миттєва кутова швидкість блока 3. Момент інерції блока 3 визначається як момент інерції однорідного суцільного циліндра $I_{C_3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 = \frac{1}{2} m 4r^2 = 2mr^2$. Оскільки блок 3 рухається таким чином, що нитка відносно поверхні блока не проковзує, то миттєвий центр швидкостей знаходиться у точці *P*. Тому $\omega_3 = \frac{\mathrm{v}_{C_3}}{R_3}$. Швидкість v_{C_3} точки C_3 блока дорівнює $\mathrm{v}_{C_3} = \frac{\mathrm{v}_D}{2}$, а $\mathrm{v}_D = \mathrm{v}_E$.

Швидкість v_E точки *E* блока 2 знайдемо із співвідношення:

$$\frac{v_B}{r_2} = \frac{v_E}{R_2} = \omega_2 .$$

Враховуючи те, що $r_2 = 0{,}5R_2$, з урахуванням $v_B = v_1$, одержимо $v_{C_3} = \frac{R_2}{2r_2} v_1 = v_1$, $\omega_3 = \frac{v_1}{R_3} = \frac{v_1}{2r}$. Тоді кінетична енергія блока 3 дорівнює:

$$T_3 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 2mr^2 \left(\frac{v_1}{2r} \right)^2 = \frac{3}{4} m v_1^2 .$$

Кінетична енергія тіла 4, яке рухається поступально, записується так

$$T_4 = \frac{m_4 v_4^2}{2},$$

де v_4 – швидкість тіла 4, яка з урахуванням нерозтяжності нитки дорівнює $v_4 = v_{C_3} = v_1$. Отримаємо $T_4 = \frac{m v_1^2}{2}$.

Кінетична енергія всієї механічної системи з урахуванням одержаних формул для $T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4$:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{15}{4} m v_1^2 .$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи, на заданому переміщенні *s* тіла 1.

До тіла 1 прикладено (рис. 5.4) силу тяжіння $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$, силу тертя ковзання $\vec{F}_{тр}$ та нормальну складову реакції похилої площини $\vec{N}_1$. Оскільки вказані сили є сталими, робота кожної з них визначається виразами:

$$A(\vec{P}_1) = m_1 g h_1 = m_1 g s \sin\alpha , \qquad A(\vec{F}_{тр}) = F_{тр} \cdot s \cdot \cos(\widehat{\vec{F}_{тр}, \vec{v}_1}),$$

$$A(\vec{N}_1) = N_1 \cdot s \cdot \cos(\widehat{\vec{N}_1, \vec{v}_1}) = N_1 \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0 ,$$

де $h_1 = s \sin\alpha$ – зміна висоти точки прикладання сили тяжіння $\vec{P}_1$.

Для визначення роботи сили тертя, спроектуємо систему сил, прикладених до тіла 1, на вісь, перпендикулярну до похилої площини:

$$0 = N_1 - m_1 g \cos\alpha .$$

З цього рівняння знайдемо значення нормальної складової реакції похилої площини $N_1 = m_1 g \cos\alpha$.Тоді робота сили тертя дорівнює

$$A(\vec{F}_{\text{тр}}) = F_{\text{тр}} \cdot s \cdot \cos(\vec{F}_{\text{тр}}, \widehat{\vec{\mathrm{v}}_1}) = fN_1 \cdot s \cdot \cos(180^\circ) = -fm_1 gs \cos\alpha .$$

Зовнішніми силами, прикладеними до тіла 2, є сила тяжіння $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$, реакції $\vec{X}_{O_2}$, $\vec{Y}_{O_2}$ циліндричного шарніра O_2 та пара сил з моментом *M*. Точка прикладання O_2 трьох сил нерухома, відповідно, їх робота дорівнює нулю. Робота момента пари сил, сталого за значенням, визначається так

$$A(\vec{M}) = M \cdot \varphi_2 ,$$

де кут повороту φ_2 нескладно визначити через довжину *s* змотаної нитки

$$\varphi_2 = \frac{s}{r_2} = \frac{s}{r} .$$

Тоді отримаємо

$$A(\vec{M}) = M \frac{s}{r} .$$

До тіла 3 у точці *P* прикладено зовнішню силу натягу нитки $\vec{S}_3$ та силу ваги $\vec{P}_3 = m_3 \vec{g}_3$. До тіла 4 прикладено силу ваги $\vec{P}_4 = m_4 \vec{g}_4$. Робота сил ваги $\vec{P}_3$ і $\vec{P}_4$:

$$A(\vec{P}_3) = -m_3 g h_3 , \qquad A(\vec{P}_4) = -m_4 g h_4 ,$$

де $h_3 = h_4 = h$ - переміщення вгору центра мас C_3 блока 3 і тіла 4.

Для визначення переміщення h слід врахувати те, що між лінійними переміщеннями точок такі ж залежності, як і між їх швидкостями. Через те, що $\mathrm{v}_{C_3} = \frac{R_2}{2r_2} \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_1$ отримаємо: $h = \frac{R_2}{2r_2} s = s$. Тому:

$$A(\vec{P}_3) = -m_3 gs , \qquad A(\vec{P}_4) = -m_4 gs ,$$

Сила натягу $\vec{S}_3$ прикладена в точці P (миттєвому центрі швидкостей тіла 3), яка є нерухомою, тому робота цієї сили дорівнює нулю.

Сума робіт зовнішніх сил визначиться додаванням отриманих виразів:

$$\sum A_i^{зовн} = m_1 gs \sin\alpha - f m_1 gs \cos\alpha + M\frac{s}{r} - m_3 gs - m_4 gs .$$

З урахуванням значень відповідних величин

$$\sum A_i^{зовн} = mgs(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 2mgr\frac{s}{r} - 2mgs \approx 0,636mgs .$$

Відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи прирівняємо значення T і $\sum A_i^{зовн}$:

$$\frac{15}{4} m \mathrm{v}_1^2 = 0,636mgs ,$$

звідси

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{4\cdot 0,636gs}{15}} = \sqrt{\frac{4\cdot 0,636\cdot 9,81\cdot s}{15}} = 1,29\sqrt{s} .$$

Відповідь: $\mathrm{v}_1 = 1,29\sqrt{s}$.

Завдання № 6. Застосування загального рівняння статики для визначення реакцій в'язей.

Конструкція складається з двох частин, з'єднаних між собою ідеальним шарніром C (рис. 6.1), і утримується у точці A жорстким защемленням, а у точці E – рухомим шарніром або ідеальним стержнем. Конструкція знаходиться у рівновазі під дією зосереджених сил P_1 та P_2, пар сил з моментами M_1 та M_2, рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q. Числові значення вказаних величин та довжини відрізків вказані у таблиці 6. У випадку від'ємних значень, напрям відповідної сили або момента змінюється на протилежний до вказаного на рисунку. Значення кутів α та β наведено у градусах. Конструкцію вважати невагомою. Визначити складові реакцій в'язей, які вказано у таблиці 6, складаючи одне рівняння для відповідної невідомої.

Таблиця 6.

Варіант	P_1, Н	P_2, Н	M_1, Нм	M_2, Нм	AB, м	BC, м	CD, м	DE, м	α,°	β,°	q, Н/м	Шукані невідомі
0	80	50	0	20	2	2	3	3	30	45	20	M_A, X_A
1	100	-80	80	0	4	4	2,5	2,5	60	45	-40	R_E, X_A
2	-50	60	0	-30	4	3	2	3	60	30	30	M_A, Y_A
3	100	-50	-40	0	1,5	1,5	2	2	30	30	-10	R_E, Y_A
4	-80	100	0	40	2	2	4	4	60	60	50	M_A, R_E
5	-60	-100	50	0	2	2	2,5	2,5	30	45	-20	R_E, X_A
6	100	-60	0	-30	3	3	2	2	30	60	40	M_A, Y_A
7	50	50	-60	0	2	2	1,5	1,5	45	60	-30	R_E, Y_A
8	-100	100	0	60	4	4	3	3	60	30	10	M_A, R_E
9	50	-100	90	0	2,5	2,5	2	2	45	30	-50	X_A, Y_A

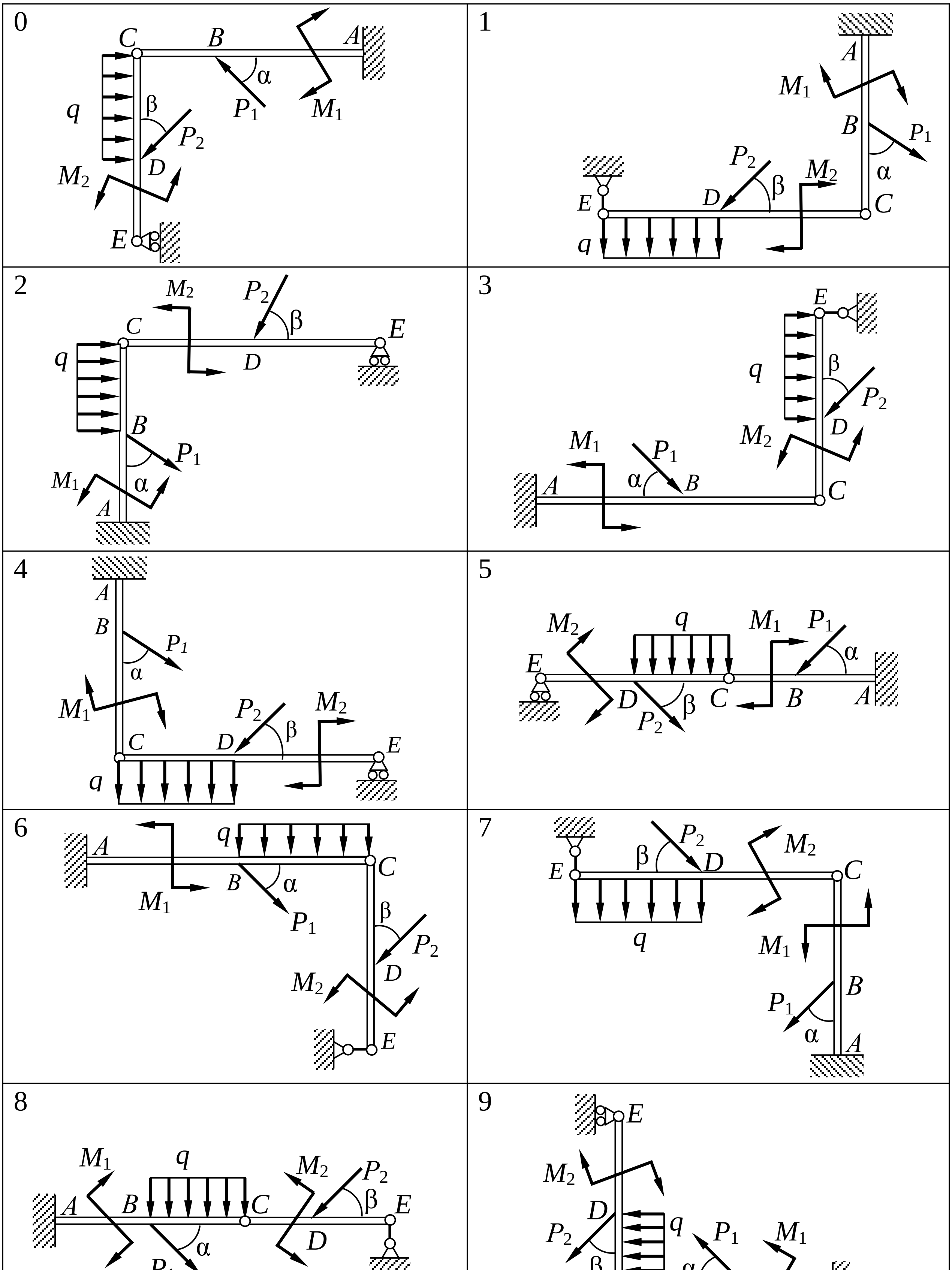

0
C B A
α β
q
P1 M1 P2
M2 D
E
1
A
M1
B P1
α
P2 M2
E D β C
q
2
M2 P2
C β E
q D
B
P1
M1 α
A
3
E
q β
P2
D
M2
M1 P1
α B
A C
4
A
B P1
α
M1
P2 M2
C D β E
q
5
M2 q M1 P1
E α
D β C B A
P2
6
q
A C
B α
M1 P1
β
P2
D
M2
E
7
P2 M2
β D
E C
q
M1
B
P1
α
A
8
M1 q M2 P2
A B C β E
D
α
P1
9
E
M2
D q
P2 P1 M1
β α
C B A

Рис.6.1

Приклад 6. Конструкція складається з двох частин *AC* та *CB*, які з’єднані між собою циліндричним шарніром у точці *C* (рис. 6.2,а). Ліва частина конструкції *AC* жорстко защемлена в перетині *A*, права частина *CB* з’єднана з підлогою рухомою опорою *B*. Конструкція знаходиться у рівновазі під дією сили P=4 кН, розподіленого навантаження інтенсивністю q=3 кН/м та пари сил з моментом M=5 кН·м. Визначити реакцію жорсткого защемлення в точці *A*. Довжини відрізків дорівнюють $AK = KC = 1$ м, $CG = 2$ м, $GB = 4$ м, кут α=60°.

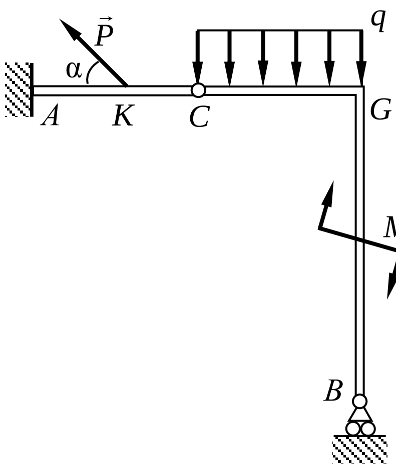


Рис. 6.2,а

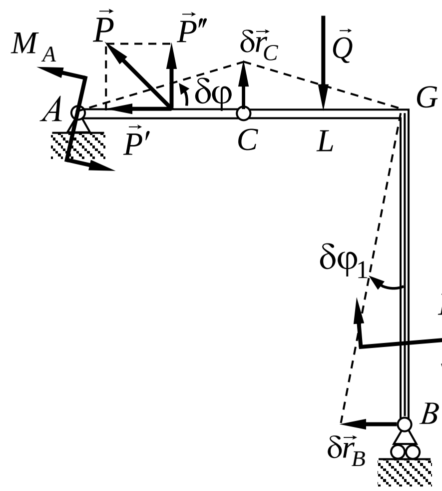


Рис. 6.2,б

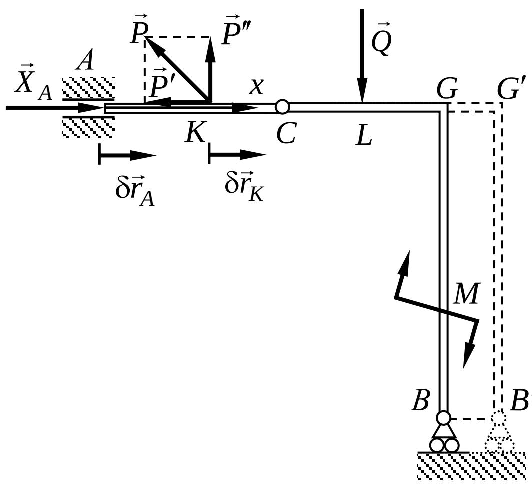


Рис. 6.2,в

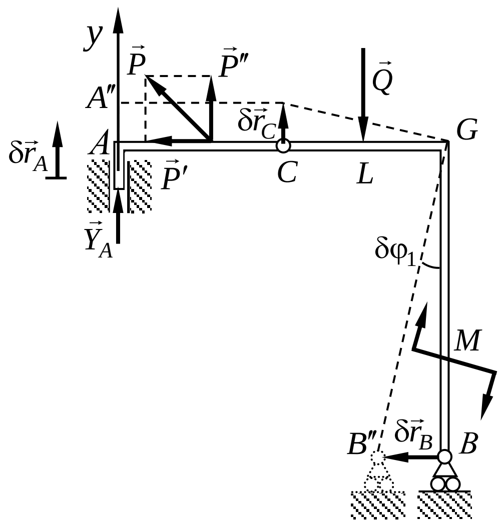


Рис. 6.2,г

Розв'язання. Реакція жорсткого защемлення в точці A складається з невідомої сили $\vec{R}_A$, яка лежить в площині рисунка та пари сил з моментом $\vec{M}_A$. Невідому силу $\vec{R}_A$ можна подати як векторну суму двох складових напрямлених вздовж координаних осей: $\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$. Таким чином, в даній задачі треба знайти три невідомих.

Розв'язання даної задачі методами геометричної статики вимагає складання шести рівнянь рівноваги, кожне з яких, у загальному випадку, може включати кілька невідомих.

Застосуємо загальне рівняння статики і визначимо кожну невідому з окремого рівняння.

Замінимо розподілене навантаження q зосередженою силою $\vec{Q}$ (рис. 6.2, б), значення якої Q=q·CG=3·2=6 кН. Лінія дії сили $\vec{Q}$ проходить через точку L, що є серединою відрізка CG.

Для визначення пари сил з моментом $\vec{M}_A$ в точці A, надамо можливість частині AC рами обертатися навколо точки A. Використовуючи аксіому про звільнення від в'язей, опору A замінимо нерухомим шарніром і прикладемо шукану пару сил з моментом $\vec{M}_A$ (рис. 6.2, б). Таким чином, конструкція буде зрівноваженою під дією сил $\vec{P}$ і $\vec{Q}$ та пар сил з моментами $\vec{M}_A$ і $\vec{M}$.

Аналіз в'язей показує, що шарніри є утримувальними та ідеальними в'язями, оскільки тертя в них відсутнє.

Надамо можливе переміщення $\delta\varphi$ частині AC рами так, як показано на рисунку 6.2, б. При цьому частина AC здійснює обертальний рух навколо нерухомої точки A, а частина CB - плоскопаралельний рух, який можна подати як миттєвий обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей (МЦШ). Використовуючи графічний спосіб, визначаємо МЦШ частини CB

– точку G, як точку перетину перпендикулярів до напрямків можливих переміщень точки C та точки B.

Застосуємо загальне рівняння статики та знайдемо роботу сили при обертальному русі тіла як роботу момента цієї сили відносно центра обертання. Отримаємо

$$\vec{M}_A\overrightarrow{\delta\varphi}+\vec{M}_A(\vec{P})\overrightarrow{\delta\varphi}+\vec{M}_G(\vec{Q})\overrightarrow{\delta\varphi_1}+\vec{M}\,\overrightarrow{\delta\varphi_1}=0\,, \qquad (1)$$

де $\overrightarrow{\delta\varphi}$ - вектор, який збігається з напрямком вектора кутової швидкості повороту частини AC на кут $\delta\varphi$, $\overrightarrow{\delta\varphi_1}$ - вектор, який напрямлений за вектором миттевої кутової швидкості повороту частини CB на кут $\delta\varphi_1$. З урахуванням напрямків моментів, вираз (1) набуває вигляду

$$M_A\delta\varphi+M_A(\vec{P})\delta\varphi-M_G(\vec{Q})\delta\varphi_1+M\delta\varphi_1=0\,. \qquad (2)$$

Вектор сили $\vec{P}$ розкладемо на дві взаємно перпендикулярні складові: $\vec{P}=\vec{P}'+\vec{P}''$, де $P'=P\cos\alpha$, $P''=P\sin\alpha$. Тоді момент сили $\vec{P}$ відносно точки A визначимо як суму моментів цих складових. Маємо

$$M_A\delta\varphi+P''\cdot AK\delta\varphi-Q\cdot GL\delta\varphi_1+M\delta\varphi_1=0\,. \qquad (3)$$

Визначимо зв'язок між можливими переміщеннями $\delta\varphi$ і $\delta\varphi_1$. Нехай ω – кутова швидкість обертального руху частини AC, ω_1 – миттєва кутова швидкість частини CB. Оскільки точка C належить одночасно обом частинам конструкції, можна записати

$$\mathrm{v}_C=\omega\cdot AC\,, \qquad \mathrm{v}_C=\omega_1\cdot GC\,.$$

Тоді $\omega_1=\dfrac{AC}{GC}\omega$, звідки

$$\delta\varphi_1=\frac{AC}{GC}\delta\varphi\,. \qquad (4)$$

Виключаємо $\delta\varphi_1$ з рівняння (3), враховуючи формулу (4). Отримаємо:

$$M_A\delta\varphi+P\sin\alpha\cdot AK\delta\varphi-Q\cdot GL\frac{AC}{GC}\delta\varphi+M\,\frac{AC}{GC}\delta\varphi=0,$$

або

$$(M_A + P\sin\alpha \cdot AK - Q \cdot GL\frac{AC}{GC} + M\frac{AC}{GC})\delta\varphi = 0.$$

Оскільки δφ - незалежне та довільне можливе переміщення, маємо

$$M_A = -P\sin\alpha \cdot AK + Q \cdot GL\frac{AC}{GC} - M\frac{AC}{GC}. \qquad (5)$$

З умови маємо $AC = GC = 2$ м, і підставимо інші числові значення в (5): M_A=–2,46 кН·м.

Визначимо горизонтальну складову $\vec{X}_A$ реакції $\vec{R}_A$ жорсткого защемлення. Використовуючи аксіому про звільнення від в’язей, замінимо опору A ковзним защемленням і прикладемо шукану силу $\vec{X}_A$ (рис. 6.2,в). Таким чином, конструкція буде зрівноваженою під дією сил $\vec{P}$, $\vec{Q}$, пари сил з моментом $\vec{M}$ та реакції $\vec{X}_A$, яку умовно відносимо до активних сил.

Надамо точці A можливе переміщення $\delta\vec{r}_A$ у напрямку дії реакції $\vec{X}_A$. Обидві частини конструкції будуть здійснювати поступальний рух вздовж осі Ax. Запишемо загальне рівняння статики і врахуємо, що сила $\vec{Q}$ та пара сил з моментом $\vec{M}$, на можливому переміщенні $\delta\vec{r}_A$ роботу не виконують. Маємо

$$\vec{P}\delta\vec{r}_K + \vec{X}_A\delta\vec{r}_A = 0. \qquad (6)$$

Оскільки $\delta r_A = \delta r_K$, вираз (6) набуває вигляду

$$-P\cos\alpha\delta r_A + X_A\delta r_A = 0.$$

Для заданого можливого переміщення виконується умова $\delta r_A \neq 0$, тоді отримаємо $X_A = P\cos\alpha = 2$ кН.

Визначимо вертикальну складову $\vec{Y}_A$ реакції жорсткого защемлення. Для цього замінимо опору A ковзним защемленням як показано на рис. 6.2,г. Прикладемо шукану силу $\vec{Y}_A$. Таким чином, конструкція буде зрівноваженою під дією сил $\vec{P}$ і $\vec{Q}$, пари сил з моментом $\vec{M}$ та реакції $\vec{Y}_A$, яку умовно відносимо до активних сил.

Надамо точці *A* можливе переміщення $\delta\vec{r}_A$ вверх. Тоді ліва частина конструкції буде рухатись поступально у вертикальному напрямку. Одночасно права частина здійснює плоскопаралельний рух. Миттєвий центр швидкостей правої частини *CB*, точку *G*, знайдемо як точку перетину перпендикулярів до напрямків можливих переміщень точки *C* та точки *B*.

Оскільки плоскопаралельний рух тіла можна подати як миттєвий обертальний рух навколо МЦШ, роботу сили $\vec{Q}$ знайдемо як роботу момента цієї сили відносно миттєвого центра обертань *G* правої частини конструкції. Тоді загальне рівняння статики запишеться так

$$\vec{Y}_A\delta\vec{r}_A + \vec{P}\delta\vec{r}_K + \vec{M}_G(\vec{Q})\overrightarrow{\delta\varphi_1} + \vec{M}\,\overrightarrow{\delta\varphi_1} = 0\ . \tag{7}$$

У виразі (7) $\overrightarrow{\delta\varphi_1}$ - вектор, напрям якого збігається з напрямком вектора миттевої кутової швидкості повороту частини *CB* конструкції на кут $\delta\varphi_1$.

Наступним кроком виразимо можливі переміщення δr_K та $\delta\varphi_1$ через можливе переміщення δr_A. Оскільки швидкості та переміщення усіх точок лівої частини конструкції однакові, одержимо

$$\delta r_K = \delta r_A = \delta r_C\,.$$

Співвідношення між миттєвою кутовою швидкістю правої частини конструкції ω_1 та швидкістю точки *C* має вигляд $\omega_1 = \dfrac{\mathrm{v}_C}{GC}$. Звідси маємо

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta r_C}{GC} = \frac{\delta r_A}{GC}\,.$$

Підставимо ці вирази в рівняння (7) і врахуємо напрями сил та моментів:

$$Y_A\delta r_A + P\sin\alpha\delta r_A - Q\cdot GL\frac{\delta r_A}{GC} + M\,\frac{\delta r_A}{GC} = 0\,.$$

Оскільки можливе переміщення r_A довільне та незалежне, отримаємо

$$Y_A = -P\sin\alpha + Q\frac{GL}{GC} - \frac{M}{GC},$$

або після підстановки числових значень $Y_A = -2,96$ кН.

Значення сили R_A отримаємо з виразу $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 3,57$ кН.

Зазначимо, що визначення реакції рухомої опори у точці B може бути здійснено також складанням одного рівняння. Це рівняння є сумою робіт активних сил та реакції $\vec{R}_B$ на можливих переміщеннях точок їх прикладання спричинених можливим переміщенням $\delta\vec{r}_B$ точки B у напрямку осі Oy.

Відповідь: M_A=–2,46 кН·м,

$X_A = 2$ кН, $Y_A = -2,96$ кН, $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 3,57$ кН.

Завдання № 7. Застосування загального рівняння динаміки до дослідження руху механічної системи.

Використовуючи методику отримання загального рівняння динаміки, скласти диференціальне рівняння руху системи тіл з одним степенем вільності (рис. 7.1) та знайти залежність від часу координати вказаної у таблиці 7: $s_1(t)$ – переміщення тіла 1, $\varphi_2(t)$ – кут повороту тіла 2, $s_3(t)$ – переміщення центру O_3 блока 3, $\varphi_3(t)$ – кут повороту тіла 3.

Схеми механізмів подано на рис. 7.1. Дані для розв’язання задачі наведено в табл. 7, де через m_1, m_2, m_3 позначено маси тіл. Радіуси великих та малих кіл блоків 2 та 3 позначено через R_2, R_3, r_2, r_3. Радіуси інерції цих блоків відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центри, позначено i_2, i_3. Блоки, які на рисунку зображено одним колом, вважати суцільними однорідними циліндрами з радіусом R_2 або R_3. Через f позначено коефіцієнт тертя ковзання, δ – коефіцієнт тертя кочення.

Механічна система починає рухатись зі стану спокою під дією сил ваги.

При виконанні завдання масами ниток знехтувати.

Графічний матеріал повинен складатися з наступних рисунків: загальний вигляд схеми механізму; рисунок системи тіл з вказанням можливих переміщень точок системи, прикладених активних сил та моментів, реакцій в’язей та сил і моментів сил інерції; рисунок схеми механізму з вказанням швидкостей тіла 1, центру блока 3 та точок дотику ниток до блоків 2 та 3.

Таблиця 7.

Варіант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	i_2, см	i_3, см	f	δ, см	Шукана координата
0	$3m$	$2m$	$2m$	20	10	20	10	15	15	0,30	0,15	$s_3(t)$
1	$2m$	$3m$	m	25	10	20	10	20	15	0,25	0,20	$\varphi_2(t)$
2	$3m$	m	$4m$	30	15	30	20	20	25	0,20	0,10	$s_1(t)$
3	$2m$	$4m$	m	20	10	30	15	15	20	0,25	0,20	$\varphi_3(t)$
4	m	$2m$	$5m$	40	20	50	25	30	40	0,35	0,10	$s_1(t)$
5	m	m	$4m$	30	20	30	15	25	20	0,25	0,05	$s_3(t)$
6	$4m$	$3m$	$2m$	30	15	40	20	20	30	0,30	0,10	$\varphi_2(t)$
7	$2m$	$4m$	$4m$	40	30	30	20	30	25	0,25	0,10	$s_1(t)$
8	$4m$	$2m$	$4m$	30	10	30	20	20	25	0,35	0,10	$\varphi_3(t)$
9	$3m$	$4m$	$2m$	30	20	30	10	20	25	0,25	0,10	$s_3(t)$

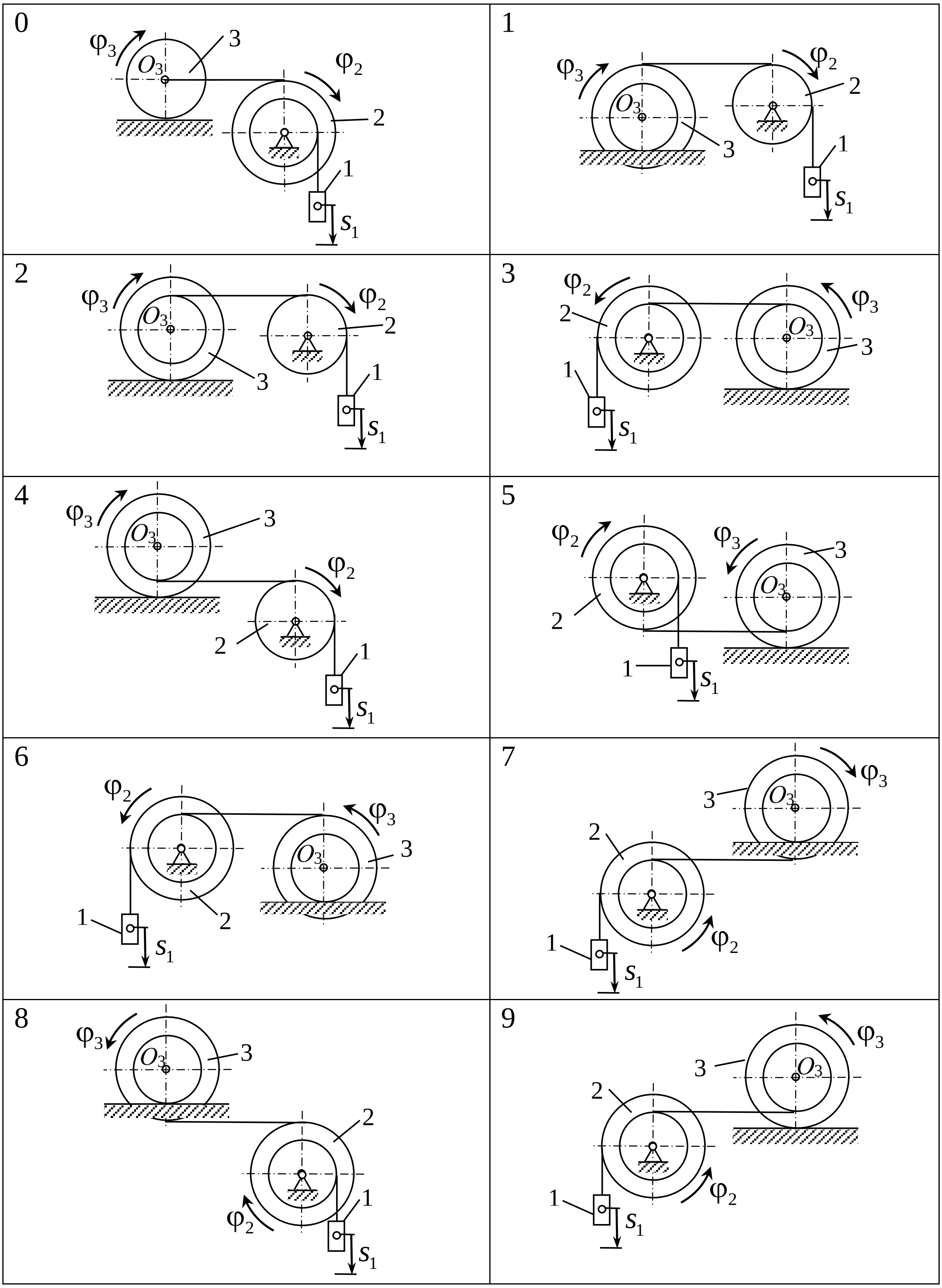

0
φ3
O3
3
φ2
2
1
s1
1
φ3
O3
3
φ2
2
1
s1
2
φ3
O3
3
φ2
2
1
s1
3
φ2
2
1
s1
O3
φ3
3
4
φ3
O3
3
φ2
2
1
s1
5
φ2
2
1
s1
φ3
O3
3
6
φ2
2
1
s1
φ3
O3
3
7
φ3
O3
3
2
φ2
1
s1
8
φ3
O3
3
2
φ2
1
s1
9
φ3
O3
3
2
φ2
1
s1

Рис. 7.1

Приклад 7. До вантажа 1 масою m_1 прикріплено кінець тонкої нерозтяжної нитки, яку перекинуто через блок 2 масою m_2 і з'єднано з віссю C котка 3 радіуса r і масою m_3 (рис. 7.2). Коток 3 котиться без проковзування вздовж шорсткої похилої площини, яка складає кут α з горизонтом. Скласти диференціальне рівняння руху системи тіл за координатою s_1, яка відповідає переміщенню тіла 1 вниз, та знайти її залежність від часу. Блок 2 та коток 3 вважати однорідними циліндрами, коефіцієнт тертя кочення котка вважати рівним δ, коефіцієнт тертя f. Вагою ниток знехтувати. У початковий момент часу система була у спокої.

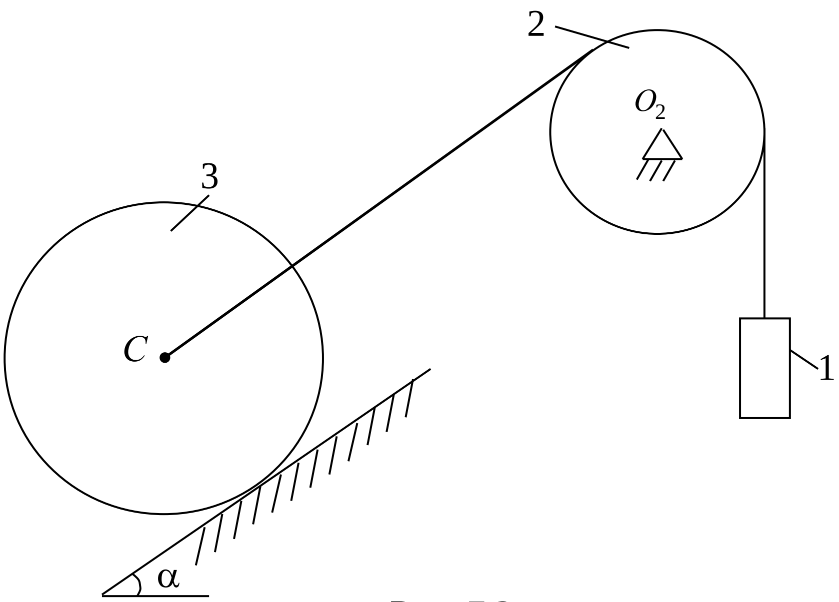


Рис. 7.2

Розв'язання. Об'єктом дослідження даної задачі є система трьох тіл. Дана система має один степінь вільності, оскільки її повністю зупиняє одна накладена в'язь.

З умови задачі випливає, що дана система тіл рухається під дією сил тяжіння. Зображуємо сили тяжіння тіл системи $\vec{P}_i = m_i\vec{g},\ i = 1,\ 2,\ 3$ (рис. 7.3) і припускаємо, що тіло 1 рухається вниз.

В'язями для механічної системи є невагома нерозтяжна нитка, вісь обертання блока 2 і похила шорстка площина. Вісь обертання блока 2 та нитка є ідеальними в'язями, похила площина не є ідеальною в'яззю.

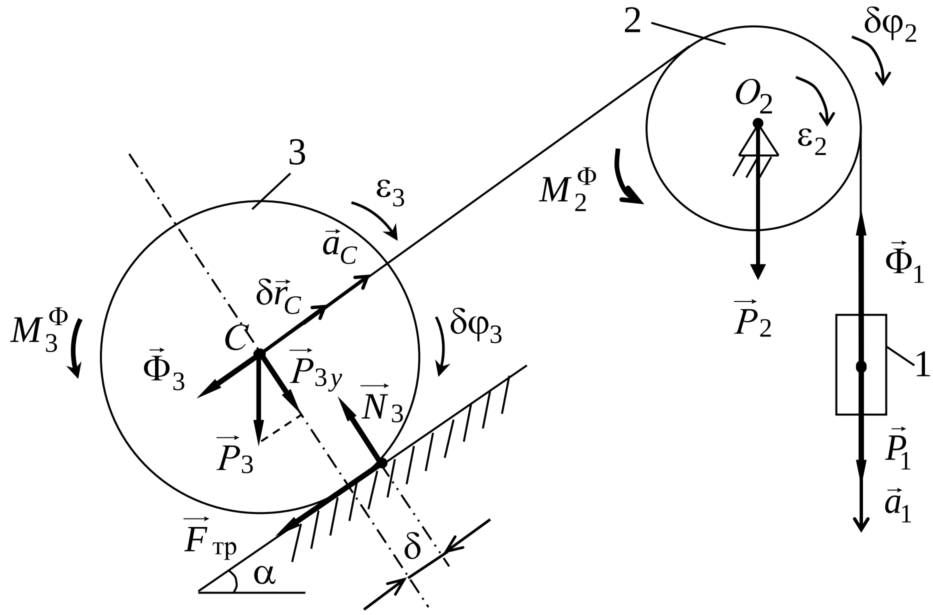


Рис. 7.3

При коченні котка 2 по похилій площині, внаслідок деформації котка і площини, їх дотик відбувається не в одній точці, а вздовж невеликої дуги. Реакція площини, яка підраховується вздовж цієї дуги, розкладається на нормальну та дотичну складову. Дотична складова реакції є силою тертя зчеплення $\vec{F}_{тр}$. Оскільки сила ваги та сила натягу нитки прикладені у центрі котка і його рух, згідно припущення, відбувається вгору, спрямуємо силу тертя зчеплення $\vec{F}_{тр}$ протилежно до напрямку руху точки C. Нормальна складова реакції $\vec{N}_3$ виявляється зміщеною відносно центра тяжіння C котка 2 в напрямку руху на величину δ, яку називають коефіцієнтом тертя кочення. Тоді складова реакції $\vec{N}_3$ та складова сили тяжіння $\vec{P}_{3y}$, яка перпендикулярна до опорної площини, утворюють пару сил $(\vec{N}_3, \vec{P}_{3y})$ з плечем δ, момент якої є моментом тертя кочення:

$$M_{\text{тр.к}} = \delta N_3 = \delta(\vec{P}_3)_y = \delta P_3 \cos\alpha \,.$$

Віднесемо умовно до активних сил силу тертя зчеплення $\vec{F}_{\text{ðð}}$ котка, а також момент тертя кочення $M_{\text{тр.к}}$. Зазначимо, що умова відсутності проковзування котка визначається виразом $F_{\text{тр}} \le fN_3 = fP_3 \cos\alpha$, f – коефіцієнт тертя.

Вважаємо, що прискорення $\vec{a}_1$ тіла 1 спрямоване вниз, тоді прискорення точки C – паралельно до похилої площини вгору. Кутове прискорення ε_2 блока 2 позначимо на рисунку дуговою стрілкою (вектор $\vec{\varepsilon}_2$ напрямлений вздовж осі повороту блока 2 від читача). Кутове прискорення ε_3 котка 3 узгоджується з напрямком руху точки C.

Визначимо головні вектори та головні моменти сил інерції. Тіло 1 здійснює поступальний рух, його головний вектор сил інерції визначається так:

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}_1 \,.$$

Система сил інерції блока 2, який здійснює обертальний рух, зводяться до пари сил з моментом

$$\vec{M}_2^{\Phi} = -I_2 \vec{\varepsilon}_2 \,,$$

де осьовий момент інерції блока

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \,,$$

тут R_2 - радіус блока 2.

Таким чином, головний момент сил інерції блока 2

$$M_2^{\Phi} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \varepsilon_2 \,.$$

Коток 3 здійснює плоскопаралельний рух. Система сил інерції цього тіла при виборі центра зведень в точці C зводиться до головного вектора

$$\vec{\Phi}_3 = -m_3 \vec{a}_C$$

та пари сил, момент якої дорівнює головному моменту сил інерції відносно точки C:

$$\overrightarrow{M}_3^{\Phi} = -I_3 \vec{\varepsilon}_3,$$

де $I_3 = \dfrac{1}{2} m_3 R_3^2$.

Вираз для момента сил інерції котка

$$M_3^{\Phi} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \varepsilon_3.$$

Умовно зупинимо систему в довільний момент часу і надамо їй з цього положення можливе переміщення. Нехай можливе переміщення $\delta\vec{r}_1$ тіла 1 спрямоване внизу. Тоді 2 здійснює обертальне можливе переміщення на кут $\delta\varphi_2$ за стрілкою годинника, точка C тіла 3 – поступальне можливе переміщення $\delta\vec{r}_C$, тіло 3 – обертальне можливе переміщення $\delta\varphi_3$ за стрілкою годинника. Зазначимо, що вектори $\overrightarrow{\delta\varphi_2}$ та $\overrightarrow{\delta\varphi_3}$ збігаються з напрямом відповідної кутової швидкості.

Складаємо загальне рівняння динаміки у векторній формі

$$\vec{P}_1 \delta\vec{r}_1 + \vec{\Phi}_1 \delta\vec{r}_1 + \vec{M}_2^{\Phi} \overrightarrow{\delta\varphi_2} + \vec{P}_3 \delta\vec{r}_C + \vec{\Phi}_3 \delta\vec{r}_C + \vec{M}_3^{\Phi} \overrightarrow{\delta\varphi_3} + \vec{M}_{\text{тр.к}} \overrightarrow{\delta\varphi_3} = 0.$$

Робота сили тяжіння P_2 дорівнює нулю внаслідок нерухомості точки її прикладання. Оскільки точка прикладання сили тертя $F_{\text{тр}}$ збігається з миттєвим центром швидкостей, її робота також дорівнює нулю. Враховуючи напрямки векторів маємо

$$P_1 \delta r_1 - \Phi_1 \delta r_1 - M_2^{\Phi} \delta\varphi_2 - P_3 \delta r_C \sin\alpha - \Phi_3 \delta r_C - M_3^{\Phi} \delta\varphi_3 - M_{\text{тр.к}} \delta\varphi_3 = 0.$$

Підставляємо вирази для сил інерції та моментів пар сил інерції:

$$m_1 g \delta r_1 - m_1 a_1 \delta r_1 - \frac{m_2 R_2^2}{2} \varepsilon_2 \delta\varphi_2 - m_3 g \delta r_C \sin\alpha - m_3 a_C \delta r_C -$$

$$-\frac{m_3 R_3^2}{2} \varepsilon_3 \delta\varphi_3 - \delta m_3 g \cos\alpha \delta\varphi_3 = 0.$$

За незалежне можливе переміщення обираємо переміщення тіла 1. Оскільки нитка нерозтяжна, то

$$\delta r_1 = \delta r_C = \delta r, \qquad \delta\varphi_2 = \frac{\delta r_1}{R_2}, \qquad \delta\varphi_3 = \frac{\delta r_1}{R_3}.$$

Відповідно, зв'язок між прискореннями має вигляд:

$$a_1 = a_C, \qquad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{R_2}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{a_C}{R_3} = \frac{a_1}{R_3}.$$

Тоді загальне рівняння динаміки перетвориться наступним чином:

$$\delta r_1 \left[m_1 g - m_3 g \sin\alpha - \delta \frac{1}{R_3} m_3 g \cos\alpha - \frac{2m_1 + m_2 + 3m_3}{2} a_1 \right] = 0.$$

Оскільки можливе переміщення δr_1 задане, то $\delta r_1 \neq 0$. Тоді отримаємо:

$$m_1 g - m_3 g \sin\alpha - \delta \frac{1}{R_3} m_3 g \cos\alpha - \frac{2m_1 + m_2 + 3m_3}{2} a_1 = 0.$$

З останнього співвідношення визначаємо прискорення вантажа 1:

$$a_1 = \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha - \delta \frac{1}{R_3} m_3 \cos\alpha}{2m_1 + m_2 + 3m_3} 2g.$$

Виразимо прискорення a_1 через координату s_1

$$\ddot{s}_1 = \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha - \delta \frac{1}{R_3} m_3 \cos\alpha}{2m_1 + m_2 + 3m_3} 2g,$$

та знайдемо перший інтеграл

$$\dot{s}_1 = \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha - \delta \frac{1}{R_3} m_3 \cos\alpha}{2m_1 + m_2 + 3m_3} 2gt + C_1.$$

Інтегруємо другий раз

$$s_1 = \frac{m_1 - m_3 \sin\alpha - \delta \frac{1}{R_3} m_3 \cos\alpha}{2m_1 + m_2 + 3m_3} gt^2 + C_1 t + C_2.$$

Оскільки у початковий момент часу система була у спокої, отримаємо початкову умову за швидкістю $\dot{s}_1(0)=0$ та покладемо, що $s_1(0)=0$. Тоді для сталих інтегрування маємо: $C_1=0$, $C_2=0$.

Кінематичний закон руху системи тіл за координатою s_1 подається у вигляді

$$s_1(t)=\frac{m_1-m_3\sin\alpha-\delta\dfrac{1}{R_3}m_3\cos\alpha}{2m_1+m_2+3m_3}gt^2.$$

Відповідь: $s_1(t)=\dfrac{m_1-m_3\sin\alpha-\delta\dfrac{1}{R_3}m_3\cos\alpha}{2m_1+m_2+3m_3}gt^2$.

Завдання № 8. Рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах (рівняння Лагранжа другого роду).

8.1. Механічна система з одним степенем вільності.

Механічна система, що складається з трьох тіл (рис. 8.1), починає рухатись зі стану спокою під дією сил тяжіння. Знайти закон руху системи тіл за узагальненою координатою, вказаною в табл. 8.1, використовуючи рівняння Лагранжа другого роду. Узагальнена координата s_1 відповідає переміщенню тіла 1, узагальнена координата φ_2 відповідає повороту блока 2 навколо власної осі обертання, узагальнена координата s_3 відповідає переміщенню центра ваги рухомого блока 3, узагальнена координата φ_3 відповідає повороту блока 3.

Дані для розв'язання задачі наведено в табл. 8.1, де через m_1, m_2, m_3 позначено маси тіл. Радіуси великих та малих кіл блоків 2 та 3 позначено через R_2, R_3, r_2, r_3. Радіуси інерції цих блоків відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центри, позначено i_2, i_3. Блоки, які на рисунку зображено одним колом, вважати суцільними однорідними циліндрами з радіусом R_2 або R_3, відповідно до номера тіла. Через α позначено кут нахилу площини до горизонту (значення подано у градусах), f – коефіцієнт тертя ковзання (для варіантів з двома площинами однаковий), δ – коефіцієнт тертя кочення.

При виконанні завдання масами ниток знехтувати. Похилі ділянки ниток вважати паралельними до відповідних похилих площин.

Графічний матеріал повинен складатися з наступних рисунків: загальний вигляд схеми механізму; схема механізму з вказанням швидкостей тіла 1, центру колеса 3 та точок дотику ниток до колеса 2 та 3; схема механізму з вказанням можливих переміщень тіл та прикладених активних сил та сил умовно до них віднесених.

Таблиця 8.1

Варіант	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	i_2, см	i_3, см	α ,°	f	δ, см	Шукана координата
0	$9m$	$2m$	$2m$	20	10	20	10	15	15	60	0,20	0,15	$s_3(t)$
1	$6m$	$3m$	m	25	10	20	10	20	15	75	0,25	0,20	$\varphi_2(t)$
2	$8m$	m	$4m$	30	15	30	20	20	25	45	0,20	0,10	$s_1(t)$
3	$7m$	$4m$	m	20	10	30	15	15	20	60	0,30	0,20	$\varphi_3(t)$
4	$5m$	$2m$	$2m$	40	20	50	25	30	40	45	0,25	0,10	$s_1(t)$
5	$6m$	m	$4m$	30	20	30	15	25	20	75	0,15	0,05	$s_3(t)$
6	$4m$	$3m$	$2m$	30	15	40	20	20	30	60	0,20	0,10	$\varphi_2(t)$
7	$8m$	$4m$	m	40	30	30	20	30	25	45	0,15	0,10	$s_1(t)$
8	$6m$	$2m$	$4m$	30	10	30	20	20	25	75	0,20	0,10	$\varphi_3(t)$
9	$9m$	$4m$	$2m$	30	20	30	10	20	25	60	0,25	0,10	$s_3(t)$

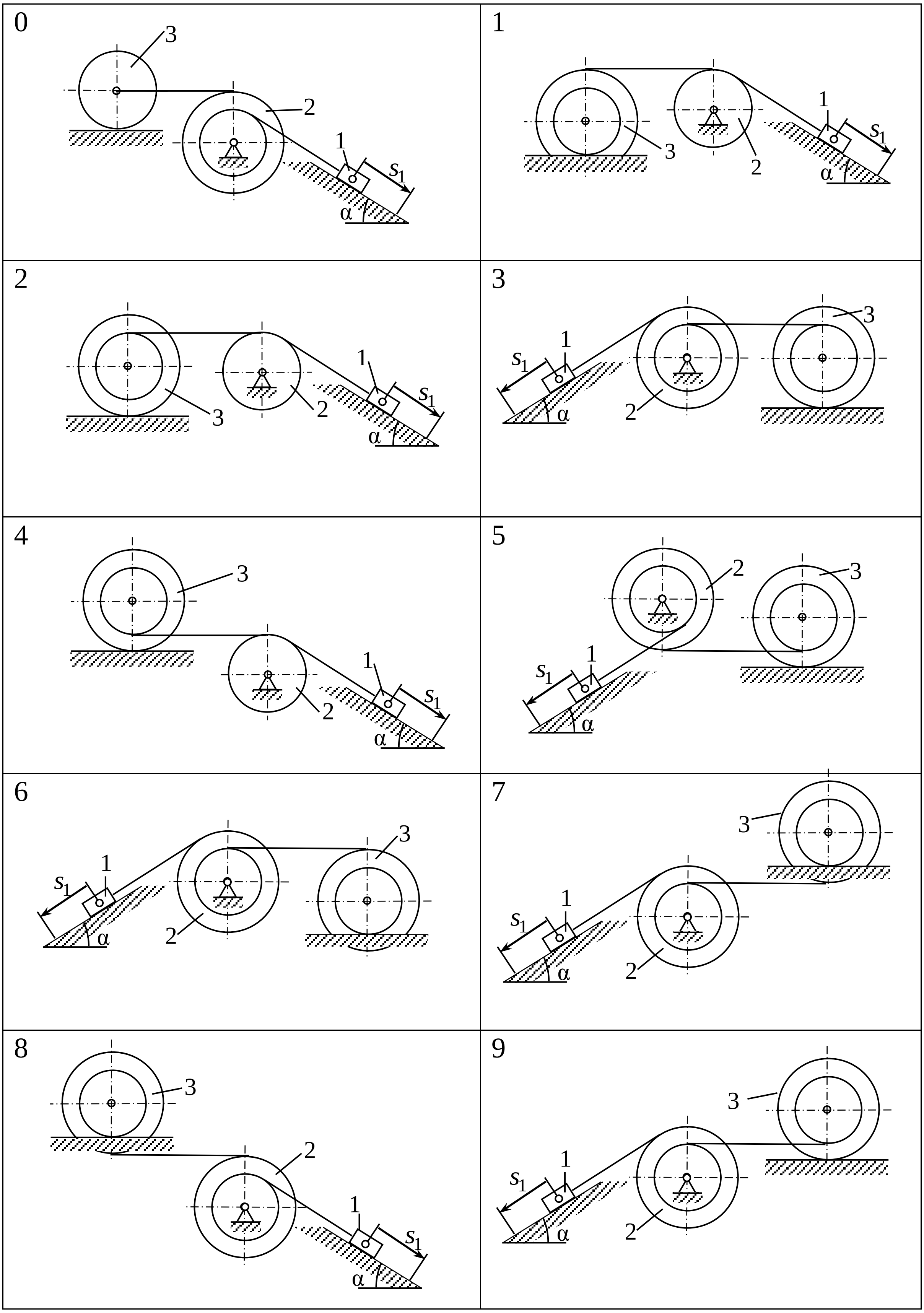

0
3
2
1
s_1
α
1
1
s_1
3
2
α
2
1
s_1
3
2
α
3
3
1
s_1
α
2
4
3
1
s_1
2
α
5
2
3
1
s_1
α
6
3
1
s_1
α
2
7
3
1
s_1
α
2
8
3
2
1
s_1
α
9
3
1
s_1
α
2

Рис. 8.1

Приклад 8.1. Вантаж 1 масою m_1=m прикріплено до невагомої нерозтяжної нитки (рис. 8.2), яка перекидається через великий радіус блока 2 масою m_2=2m. Нитка, яка сходить з малого радіуса блока 2 навита на барабан 3 масою m_3=m. Рухаючись вниз, вантаж 1 змушує котитись без ковзання барабан 3. Радіуси великого та малого кіл блока 2 відповідно дорівнюють R_2=2r, r_2=r. Радіус барабана 3 дорівнює R_3=2r. Коефіцієнт тертя кочення барабана 3 дорівнює δ=0,02r, коефіцієнт тертя f_3=0,1, радіус інерції блока 2 відносно горизонтальної осі $i_2=r\sqrt{2}$. Скласти диференціальне рівняння руху системи за узагальненою координатою $q=s_1$ та знайти закон руху тіла 1 в залежності від часу. У початковий момент система була у спокої. Барабан 3 вважати однорідним суцільними циліндром.

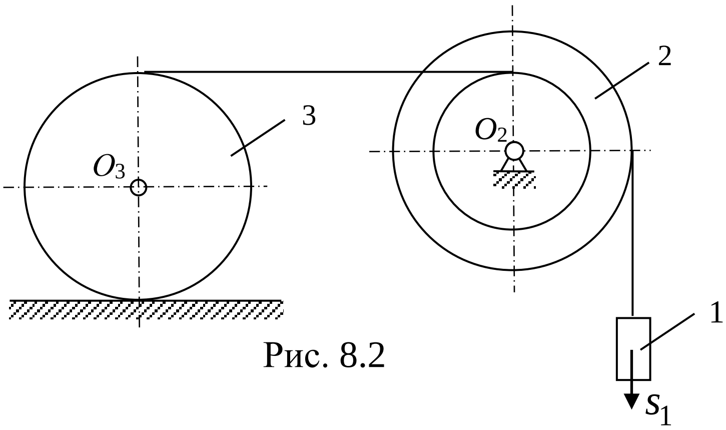


Рис. 8.2

Розв’язання. Для розв’язання задачі скористаємось рівняннями Лагранжа другого роду. В’язями накладеними на механічну систему (рис. 8.2) є невагомі нерозтяжні нитки, шарнір O_2 та шорстка горизонтальна поверхня. Перші дві в’язі є ідеальними та стаціонарними. Силу тертя зчеплення та пару сил тертя кочення барабана 3 віднесемо умовно до активних сил, що дозволяє вважати горизонтальну поверхню ідеальною в’яззю. Механічна система має один степінь вільності, оскільки вона може бути повністю зупинена накладанням тільки однієї в’язі. За узагальнену координату оберемо переміщення s тіла 1 вниз (q=s). Тоді рівняння Лагранжа другого роду приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_S, \tag{1}$$

де T – кінетична енергія системи, Q_S – узагальнена сила, яку можна подати так

$$Q_S=-\frac{\partial \Pi}{\partial s}+Q_S^*. \tag{2}$$

Тут Π – потенціальна енергія механічної системи, Q_S^* – складова узагальненої сили, яка має непотенціальний характер.

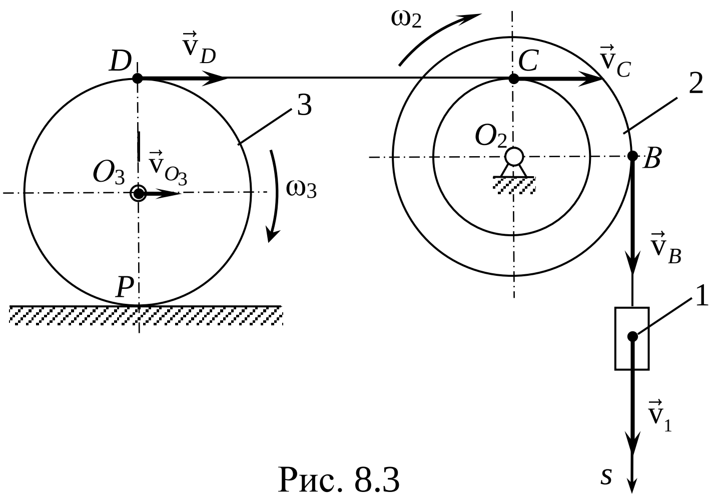


Рис. 8.3

Визначимо кінетичну енергію механічної системи $T=T_1+T_2+T_3$ як функцію узагальнених координат і швидкостей, де T_i – кінетична енергія окремого i-го тіла.

Кінетичну енергію тіла 1, яке рухається поступально (рис. 8.3), виразимо через узагальнену координату s

$$T_1=\frac{1}{2}m_1 v_1^2=\frac{1}{2}m\dot{s}^2. \tag{3}$$

Для блока 2, який обертається навколо нерухомої осі (рис. 8.3) маємо:

$$T_2=\frac{1}{2}I_2\omega_2^2. \tag{4}$$

Кінетична енергія барабана 3, який здійснює плоскопаралельний рух (рис. 8.3), записується у вигляді

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \mathrm{v}_{O_3}^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 . \tag{5}$$

Далі виразимо кутові швидкості тіл 2 та 3, а також швидкість точки O_3 через швидкість тіла 1. Оскільки нитка нерозтяжна, то $\mathrm{v}_B = \mathrm{v}_1 = \dot{s}$, $\mathrm{v}_C = \mathrm{v}_D$. Враховуючи, що $\mathrm{v}_B = \omega_2 R_2$ та $\mathrm{v}_C = \omega_2 r_2$, отримаємо

$$\omega_2 = \frac{\mathrm{v}_1}{R_2}, \qquad \mathrm{v}_D = \frac{r_2}{R_2} \mathrm{v}_1 .$$

Оскільки точка P тіла 3 у випадку кочення без ковзання є його миттєвим центром швидкостей, то

$$\omega_3 = \frac{\mathrm{v}_D}{2R_3}, \qquad \mathrm{v}_{O_3} = \frac{1}{2} \mathrm{v}_D .$$

Таким чином, кінематичні залежності мають вигляд

$$\omega_2 = \frac{\mathrm{v}_1}{R_2} = \frac{\dot{s}}{R_2}, \qquad \omega_3 = \frac{r_2}{2R_3R_2} \mathrm{v}_1 = \frac{r_2}{2R_3R_2} \dot{s}, \qquad \mathrm{v}_3 = \frac{r_2}{2R_2} \mathrm{v}_1 = \frac{r_2}{2R_2} \dot{s} . \tag{6}$$

Враховуючи кінематичні залежності (6) та вирази для моментів інерції тіл $I_2 = m_2 i_2^2 = 2m_2 r^2$, $I_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2$, отримаємо:

$$T_2 = \frac{1}{2} 2m_2 r^2 \frac{\mathrm{v}_1^2}{R_2^2} = \frac{1}{2} 4mr^2 \frac{\mathrm{v}_1^2}{4r^2} = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 , \tag{7}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{4R_2^2} \mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{4} m_3 R_3^2 \frac{r_2^2}{4R_3^2 R_2^2} \mathrm{v}_1^2 = \frac{1}{2} m \frac{r^2}{16r^2} \mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{4} m \frac{r^2}{16r^2} \mathrm{v}_1^2 = \frac{3}{64} m\dot{s}^2 . \tag{8}$$

Кінетична енергія системи тіл

$$T = \frac{67}{64} m\dot{s}^2 . \tag{9}$$

Знайдемо частинні похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{67}{32} m\dot{s} . \tag{10}$$

Після диференціювання останнього виразу за часом отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{67}{32} m\ddot{s} . \qquad (11)$$

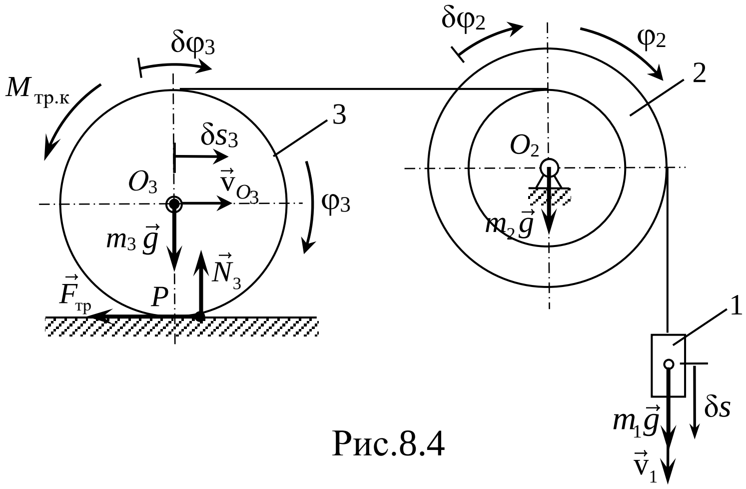


Рис.8.4

Визначимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 ,$$

де Π_i - потенціальна енергія *i*-го тіла, як роботу сил ваги по переміщенню відповідних тіл з кінцевого положення, яке відповідає переміщенню тіла 1 вниз на відстань *s*, в початкове ($s = 0$). Отримаємо

$$\Pi_1 = -m_1 g s , \qquad \Pi_2 = 0 , \qquad \Pi_3 = 0 .$$

Два останні доданки дорівнюють нулю, оскільки сили ваги тіл 2 та 3 роботу не виконують. Тоді:

$$\Pi = -mgs .$$

Знаходимо частинну похідну за узагальненою координатою від потенціальної енергії системи:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial s} = -mg . \qquad (12)$$

Складову Q_S^* узагальненої сили Q_S визначимо як коефіцієнт при варіації δs узагальненої координати у виразі можливої (елементарної) роботи непотенціальних сил. До останніх відносяться: сила тертя зчеплення $F_{\text{тр}}$ барабана 3 та пара сил тертя кочення з моментом $M_{\text{тр.к}} = \delta N_3 = \delta (m_3 \vec{g})_{y_3} = \delta m_3 g$.

Надамо тілу 1 можливе переміщення δs в бік його додатних значень (рис. 8.4). Внаслідок цього тіло 2 отримає відповідне кутове переміщення $\delta\varphi_2$, а барабан 3 – можливе кутове переміщення $\delta\varphi_3$ та переміщення його центра ваги δs_3. Тоді, у припущенні кочення барабана 3 без ковзання, можлива робота сили тертя зчеплення $F_{\text{тр}}$ буде дорівнювати нулю, оскільки ця сила прикладена у миттєвому центрі швидкостей P і можливе переміщення точки P дорівнює нулю. Можлива (елементарна) робота пари сил тертя кочення (момента тертя кочення) має вигляд

$$\delta A = \vec{M}_{\text{тр.к}} \overrightarrow{\delta\varphi_3} = -\delta m_3 g \delta\varphi_3 . \tag{13}$$

Елементарна робота (13) має від'ємний знак, оскільки напрямок момента тертя кочення протилежний до напрямку кутової швидкості барабана 3, яка відповідає його повороту на кут $\delta\varphi_3$.

Елементарне переміщення $\delta\varphi_3$ потрібно виразити через варіацію узагальненої координати δs користуючись співвідношеннями (6):

$$\omega_3 = \frac{r_2}{2R_3R_2}\mathrm{v}_1 .$$

Оскільки $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$ та $\mathrm{v}_1 = \dfrac{ds}{dt}$, маємо

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{r_2}{2R_3R_2}\frac{ds}{dt},$$

або

$$d\varphi_3 = \frac{r_2}{2R_3R_2}ds = \frac{1}{8r}ds .$$

У випадку стаціонарних в'язей дійсні переміщення точок механічної системи є підмножиною можливих переміщень, тому останню формулу запишемо так

$$\delta\varphi_3 = \frac{1}{8r}\delta s$$

і підставимо у (13)

$$\delta A = -\delta m_3 g \delta\varphi_3 = -\delta m_3 g \frac{1}{8r}\delta s = Q_S^* \delta s\ .$$

Звідси маємо

$$Q_S^* = -\delta mg \frac{1}{8r}\ . \qquad (14)$$

Підставимо вирази (14) та (12) у формулу (2), одержимо

$$Q_S = mg - \delta mg \frac{1}{8r} = (1 - \frac{1}{8r}\delta) mg\ . \qquad (15)$$

Тепер запишемо рівняння Лагранжа другого роду (1), приймаючи до уваги вирази (10), (11) та (15):

$$\frac{67}{32} m\ddot{s} = (1 - \frac{1}{8r}\delta) mg\ . \qquad (16)$$

де (16) є шуканим диференціальним рівняння руху системи за координатою *s*. З (16) отримаємо

$$\dot{\mathrm{v}}_1 = g(1 - \frac{1}{8r}\delta)\frac{32}{67} = 0,476g\ .$$

Останній вираз дозволяє знайти швидкість тіла 1:

$$\mathrm{v}_1 = \frac{ds}{dt} = 0,476gt + C_1 \qquad (17)$$

та закон зміни координати *s*

$$s = 0,238gt^2 + C_1 t + C_2\ . \qquad (18)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 та C_2 запишемо початкові умови за координатою *s*: $s(0) = 0$, $\mathrm{v}_1 = \dot{s}(0) = 0$ та підставимо їх у вирази (17) та (18). Отримаємо: $0 = C_1$, $0 = C_2$, що дозволяє записати

$$s = 0,238gt^2\ .$$

Відповідь: $s = 0,238gt^2$.

8.2. Механічна система з двома степенями вільності.

Механічна система, що складається з п'яти тіл, рухається під дією сил тяжіння та пари сил з моментом M сталого значення.

Схеми механізмів подано на рис. 8.5. Дані для розв'язання задачі наведено в табл. 8.2.

У завданні через φ_i (i=1, 2, 3) позначено кути повороту блоків 1, 2 та 3, додатні напрямки яких показано на рисунках дуговими стрілками. Через s_1, s_4, s_5 позначено абсолютні переміщення відповідних тіл; s_2, s_3 – абсолютні переміщення центрів рухомих блоків 2 та 3. Узагальнена координата x є відносною і відповідає переміщенню тіла 4 вниз.

У табл.8.2 через m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 позначено маси тіл. Радіуси великих та малих кіл східчастих блоків 1 та 2 позначено через R_1, R_2, r_1, r_2. Радіуси інерції цих блоків відносно горизонтальних осей, які проходять через їх центри, позначено i_1, i_2. Блоки, які на рисунку зображено одним колом, вважати суцільними однорідними циліндрами з радіусом R_1 або R_2. Радіус блока 2 у варіанті рисунка 2 визначати як половину різниці між радіусом R_1 та r_1. Радіус блока 2 на рисунку 6 визначати як половину суми радіусів R_1 та r_1.

При виконанні завдання масами ниток знехтувати. Сили опору в осях обертання не враховувати.

Знайти кінематичні рівняння руху системи в координатах q_1 і q_2, які вказано в таблиці 8.2, при заданих початкових умовах, використовуючи диференціальні рівняння руху твердих тіл складених згідно методики рівнянь Лагранжа другого роду.

Графічний матеріал повинен складатися з наступних рисунків: заданої схеми механізму; схеми механізму з вказанням швидкостей, можливих переміщень, активних сил та сил умовно до них віднесених.

Таблиця 8.2

Варіант	Маси тіл					Радіуси блоків					Радіуси інерції,		Узагальнені координати		Початкові умови			
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	R_1	r_1	R_2	r_2	R_3	i_1	i_2	q_1	q_2				
0	m	$4m$	m	$3m$	m	$4r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$3r$	$\sqrt{2}r$	φ_2	x	0	0	x_0	0
1	$3m$	$5m$	m	m	$2m$	$2r$	r	$3r$	r	$3r$	$\sqrt{2}r$	$2r$	φ_1	x	0	0	0	0
2	$4m$	m	$2m$	m	$2m$	$3r$	$2r$	$3r$	r	$2r$	$\sqrt{5}r$	$2r$	φ_2	x	0	0	0	$\dot{x}_0$
3	$5m$	m	$3m$	$2m$	m	$3r$	r	$4r$	r	$2r$	$2r$	$\sqrt{5}r$	s_3	x	0	0	0	0
4	$2m$	m	m	m	$3m$	$4r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$3r$	$\sqrt{2}r$	φ_1	s_5	0	0	0	$\dot{s}_{50}$
5	$6m$	$5m$	$2m$	$3m$	m	$2r$	r	$3r$	$2r$	r	$\sqrt{2}r$	$2r$	φ_1	φ_3	0	0	φ_{30}	0
6	$4m$	$2m$	m	$2m$	m	$3r$	r	$2r$	r	$3r$	$\sqrt{5}r$	$2r$	φ_1	x	0	0	0	0
7	$5m$	$3m$	m	$4m$	$2m$	$3r$	$2r$	$2r$	r	$2r$	$3r$	$\sqrt{2}r$	s_3	φ_3	s_{30}	0	0	0
8	$3m$	$2m$	$2m$	$2m$	$3m$	$4r$	r	$3r$	$2r$	$2r$	$\sqrt{5}r$	$2r$	φ_1	φ_3	0	$\dot{\varphi}_{10}$	0	0
9	$2m$	$4m$	$3m$	$2m$	m	$3r$	r	$4r$	$2r$	$2r$	$\sqrt{3}r$	$3r$	s_1	φ_3	s_{10}	0	0	0

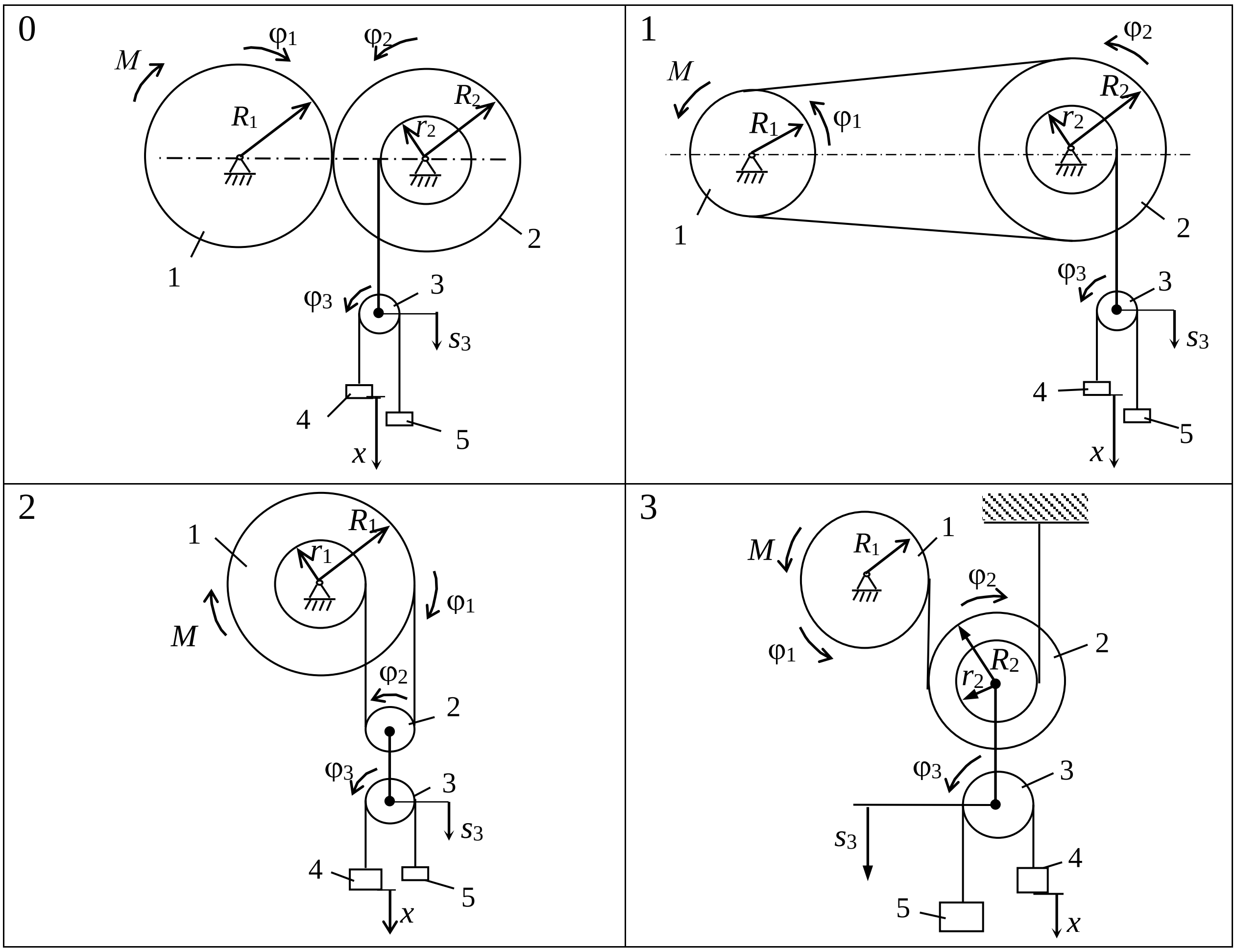


Рис. 8.5,а

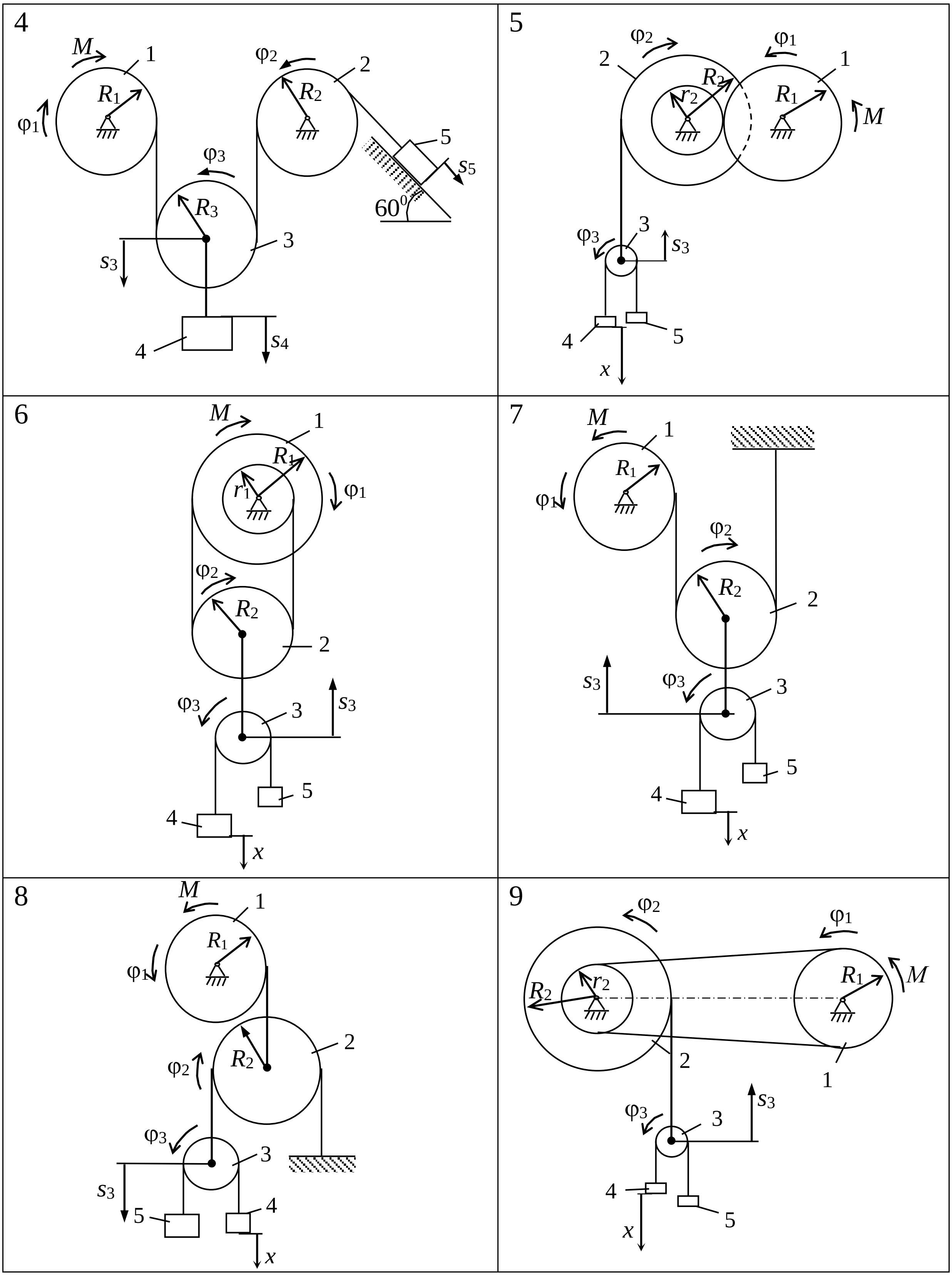


Рис. 8.5,б (продовження)

Приклад 8.2. Механічна система складається з трьох тіл (рис. 8.6,а), маси яких дорівнюють: m_1=m, m_2=2m, m_3=m. Момент M, який прикладено до нерухомого блоку 1 радіусом R_1=2r, – сталий. Радіус блока 2 дорівнює r. Блоки вважати однорідними суцільними циліндрами.

Скласти рівняння руху системи в координатах $q_1 = x$ і $q_2 = \varphi_1$ при наступних початкових умовах: $q_{10} = 0,\ q_{20} = 0,\ \dot{q}_{10} = \dot{x}_0,\ \dot{q}_{20} = 0.$

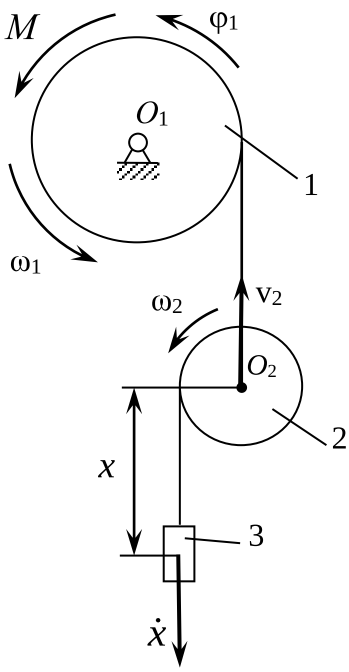


Рис. 8.6,а

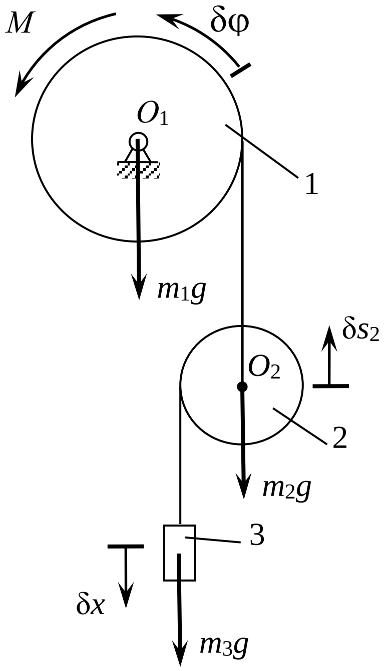


Рис. 8.6,б

Розв'язання. Складемо рівняння руху, користуючись рівняннями Лагранжа другого роду.

Механічна система, рух якої досліджується, має два степеня вільності, оскільки повна зупинка руху здійснюється накладанням двох додаткових в'язей. Відповідно, система рівнянь Лагранжа другого роду має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x^*,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_\varphi^*, \qquad (1)$$

де T – кінетична енергія системи, П – потенціальна енергія, Q_x^*, Q_φ^* - узагальнені сили, які мають непотенціальний характер.

Визначимо кінетичну енергію системи $T = \sum_{i=1}^{3} T_i$ як функцію узагальнених координат і швидкостей, де T_i – кінетична енергія окремих тіл.

Для блока 1, який обертається навколо нерухомої осі (рис. 8.6,а) маємо:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 .$$

Осьовий момент інерції блоку 1 як однорідного циліндру дорівнює $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = 4mr^2$, кутову швидкість виразимо через узагальнену кординату $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$. Отримаємо:

$$T_1 = 2mr^2 \dot{\varphi}_1^{\,2} . \quad (2)$$

Рух тіла 3 (рис. 8.6,а) можна подати як сукупність двох поступальних рухів: переносного руху разом з центром мас O_2 тіла 2 і руху тіла 3 відносно цього центра зі швидкістю $\dot{x}$. Швидкість v_2 центра мас тіла 2 з урахуванням нерозтяжності нитки можна знайти на підставі співвідношення

$$v_2 = \omega_1 R_1 = 2\dot{\varphi}_1 r . \quad (3)$$

Тоді абсолютна швидкість тіла 3

$$v_3 = v_2 - \dot{x} = 2\dot{\varphi}_1 r - \dot{x} .$$

Кінетична енергія цього тіла має вигляд:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m \left(2\dot{\varphi}_1 r - \dot{x}\right)^2 . \quad (4)$$

Блок 2 (рис. 8.6,а) здійснює плоскопаралельний рух, його кінетична енергія:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 .$$

Осьовий момент інерції $I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$. Оскільки кутова швидкість блоку 2 та відносна швидкість тіла 3 зв'язані співвідношенням $\dot{x} = \omega_2 R_2$, отримаємо:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\varphi}_1 R_1 \right)^2 + \frac{1}{4} m_2 R_2^2 \left(\frac{\dot{x}}{R_2} \right)^2 \tag{5}$$

Кінетична енергія системи після додавання виразів (2), (4), (5) і підстановки даних умови задачі, запишеться у вигляді:

$$T = 6mr^2 \dot{\varphi}_1^{\,2} + \frac{3}{4} m\dot{x}^2 - 2mr\dot{\varphi}_1 \dot{x}. \tag{6}$$

Знайдемо частинні похідні від кінетичної енергії:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m\dot{x} - 2mr\dot{\varphi}_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = 12mr^2 \dot{\varphi}_1 - 2mr\dot{x}.$$

Після диференціювання двох останніх виразів за часом отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{3}{2} m\ddot{x} - 2mr\ddot{\varphi}_1, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = 12mr^2 \ddot{\varphi}_1 - 2mr\ddot{x}. \tag{8}$$

Визначимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

як роботу сил ваги по переміщенню відповідних тіл з поточного положення в початкове (рис. 8.6,б):

$$\Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = m_2 g\, s_2, \qquad \Pi_3 = m_3 g (s_2 - x).$$

Переміщення s_2 центра мас тіла 2 визначається на підставі кінематичного співвідношення (3). Запишемо його у диференціалах та домножимо на *dt*:

$$ds_2 = R_1 d\varphi_1.$$

Після інтегрування цього виразу на інтервалі [0;t] отримаємо:

$$s_2(t) - s_2(0) = R_1(\varphi_1(t) - \varphi_1(0)).$$

Звідси, при нульових початкових умовах за координатою φ та s_2, дістанемо

$$s_2(t) = R_1\varphi_1(t).$$

Тоді потенціальна енергія системи як функція узагальнених координат x та φ_1 приймає вигляд:

$$\Pi = m_2 g R_1 \varphi_1 + m_3 g(R_1\varphi_1 - x) = 4mgr\varphi_1 - mgx.$$

Знаходимо частинні похідні за узагальненими координатами від потенціальної енергії системи:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -mg, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = 4mgr. \tag{9}$$

Узагальнені сили Q_x^* та Q_φ^* визначимо як коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат в виразі елементарної роботи непотенціальних сил. До останніх відноситься пара сил з моментом M.

Зафіксуємо координату x і надамо механічній системі елементарне переміщення $\delta\varphi_1$ в бік додатних значень зміни кута повороту φ_1. Відповідна елементарна робота має вигляд

$$\delta A = M\delta\varphi_1,$$

звідси маємо:

$$Q_\varphi^* = M. \tag{10}$$

На елементарному переміщенні δx непотенціальні сили роботи не виконують, тобто

$$Q_x^* = 0. \tag{11}$$

Таким чином, система рівнянь Лагранжа другого роду (1), з урахуванням виразів (7)–(11), запишеться так:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} - 2mr\ddot{\varphi}_1 = mg\,,$$

$$12mr^2\ddot{\varphi}_1 - 2mr\ddot{x} = -4mgr + M\,. \qquad (12)$$

Систему рівнянь (12) можна розв’язати відносно похідних

$$\ddot{x} = a_0 = \text{const}, \quad \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_0 = \text{const}\,,$$

де $\quad a_0 = \dfrac{2mgr + M}{7mr}, \quad \varepsilon_0 = \dfrac{-8mgr + 3M}{28mr^2}.$

Тоді перші інтеграли диференціальних рівнянь мають вигляд

$$\dot{x} = a_0 t + C_1, \qquad \dot{\varphi}_1 = \varepsilon_0 t + C_3\,,$$

другі інтеграли

$$x = a_0\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2\,, \qquad \varphi_1 = \varepsilon_0\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

На підставі початкових умов визначаємо сталі інтегрування $C_1 - C_4$ і отримуємо шукані рівняння руху механічної системи

$$x = \frac{2mgr + M}{7mr}t^2 + \dot{x}_0 t\,, \qquad \varphi_1 = \frac{-8mgr + 3M}{28mr^2}t^2\,.$$

Відповідь: $x = \dfrac{2mgr + M}{7mr}t^2 + \dot{x}_0 t\,, \qquad \varphi_1 = \dfrac{-8mgr + 3M}{28mr^2}t^2\,.$

Контрольні питання

Завдання 1

1. Сформулюйте другий закон Ньютона.
2. Які величини вважаються відомими, а які потрібно визначити у прямій задачі динаміки точки?
3. У чому полягає обернена задача динаміки точки і які величини в ній вважаються відомими, а які потрібно визначити?
4. Як записуються диференціальні рівняння руху точки у векторній і координатній формах?
5. Від чого залежить кількість перших або других інтегралів рівнянь руху точки?
6. Що таке початкові умови і як вони формулюються у випадку координатного способу задання руху точки?
7. Від чого залежить кількість початкових умов?
8. Як визначити сталі інтегрування при розв'язанні диференціальних рівнянь руху точки?
9. Яка методика розв'язання першої задачі динаміки?
10. Вкажіть методику розв'язання другої задачі динаміки.
11. За допомогою яких величин можна визначити силу тертя ковзання?

Завдання 2

1. Чому рекомендується вибирати початок відліку координатної осі в положенні статичної рівноваги точки?
2. Які твердження дозволяють скласти диференціальне рівняння коливального руху точки?
3. З якого виразу знаходиться статичне подовження пружини?
4. Як визначається коефіцієнт жорсткості двох послідовно з'єднаних пружин?

5. Як визначається коефіцієнт жорсткості двох паралельно з’єднаних пружин?

6. Як подається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань точки без урахування сили опору?

7. Як визначити сталі інтегрування розв'язку диференціального рівняння вільних коливань?

8. Як знайти амплітуду, колову частоту та період вільних коливань за відомим розв'язком диференціального рівняння вільних коливань точки?

9. Як подається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань точки з урахуванням сили опору у випадку великого опору?

10. Записати загальний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань точки з урахуванням сили опору у випадку кратних коренів характеристичного рівняння.

11. Вказати розв’язок диференціального рівняння вільних коливань з урахуванням сили опору у випадку малого опору.

12. Як визначити декремент коливань за відомими амплітудами вільних згасаючих коливань?

13. Чому період вільних згасаючих коливань більше періоду відповідних вільних незгасаючих коливань?

14. Чим відрізняється частинний розв’язок диференціального рівняння змушених коливань без урахування сили опору у резонансному випадку від частинного розв’язку у нерезонансному випадку?

15. Від яких величин залежить амплітуда змушених коливань точки, які відбуваються без урахування сили опору?

16. Як зсув фази змушених коливань, що відбуваються без урахування сили опору, дозволяє зафіксувати настання резонансу?

17. Як визначаються невідомі коефіцієнти частинного розв’язку диференціального рівняння змушених коливань?

18. Чому при дослідженні змушених коливань точки з урахуванням сили опору, після певного моменту часу загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння можна не аналізувати?
19. На якій частоті набуває максимального значення амплітуда змушених коливань точки, які відбуваються з урахуванням сили опору?
20. Від чого залежить максимальне значення амплітуди змушених коливань точки, які відбуваються з урахуванням сили опору?

Завдання 3

1. Сформулювати принцип Д’Аламбера для матеріальної точки і системи матеріальних точок?
2. Як називається метод розв’язання задач із застосуванням принципу Д’Аламбера до механічної системи?
3. Якою є послідовність дій при розв’язанні задач за допомогою принципу Д’Аламбера для матеріальної системи?
4. Як записуються векторні рівняння руху системи матеріальних точок у формі умов «рівноваги»?
5. Як записуються рівняння кінетостатики?
6. Як визначається сила інерції матеріальної точки, яка здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі?
7. Як визначити головний вектор сил інерції абсолютно твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
8. Який напрям мають сили інерції точок матеріальної системи при її рівномірному обертанні навколо нерухомої осі?
9. Як визначити головний момент сил інерції абсолютно твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
10. Якою є послідовність дій при розв’язанні задачі визначення внутрішнього осьового зусилля в стрижні?

Завдання 4

1. Як записуються диференціальні рівняння руху центра мас (інерції) твердого тіла?

2. З яких теорем можна отримати диференціальні рівняння руху центра мас (інерції) твердого тіла? Запишить їх.

3. Яка теорема дозволяє отримати диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?

4. Як можна записати диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?

5. Скільки диференціальних рівнянь потрібно записати у випадку плоскопаралельного руху твердого тіла і як вони виглядають?

6. Який метод використовується при застосуванні диференціальних рівнянь до дослідження руху системи твердих тіл?

7. Які додаткові співвідношення потрібно скласти після виключення внутрішніх сил у випадку застосування диференціальних рівнянь руху окремих тіл до дослідження руху механічної системи?

8. Чому виключається сила тертя (зчеплення) у диференціальних рівняннях руху тіла 3? Які вона може приймати значення при коченні тіла 3 без проковзування?

9. Яке значення набуває сила тертя у вашому варіанті?

10. Як запишеться диференціальне рівняння руху тіла 2 при зміні напрямку обертання?

11. Як визначається величина момента пари сил тертя кочення?

12. Як запишуться диференціальні рівняння руху тіла 3 вашого варіанту при зміні напрямку сили натягу?

13. Як записується момент інерції однорідного циліндричного блока відносно осі обертання?

14. Як записується момент інерції неоднорідного циліндричного блока відносно осі обертання?

Завдання 5

1. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи?

2. Про який рух системи точок йде мова у теоремі Кьоніга? Сформулюйте її.

3. Запишіть формули для визначення кінетичної енергії твердого тіла при плоскопаралельному русі, використовуючи дві форми представлення вказаного руху тіла.

4. Що спільного є між виразами кінетичної енергії твердого тіла у випадку поступального руху та обертального навколо нерухомої осі?

5. Які додаткові співвідношення потрібно скласти для визначення кінетичної енергії системи тіл? Як вони записуються у вашому варіанті?

6. Робота яких систем сил приводить до зміни кінетичної енергії системи точок у загальному випадку?

7. Запишить роботу момента пари сил в загальному випадку (інтегральний вираз) та у випадку сталого за величиною момента.

8. Запишить інтегральний вираз повної роботи сили у випадку координатного способу задання положення точки її прикладання.

9. Запишить інтегральний вираз повної роботи сили у випадку натурального способу задання положення точки її прикладання.

10. Як визначається робота сили тяжіння і чому вона дорівнює на замкненій траєкторії?

11. Чому дорівнює повна робота системи сил, яка зводиться до пари сил?

12. Вкажіть одиниці вимірювання кінетичної енергії, роботи та потужності сили.

13. Як записати момент інерції неоднорідного нерухомого блока відносно осі обертання через радіус інерції?

14. Визначте радіус інерції однорідного нерухомого блока відносно осі обертання.

15. Про що свідчить від'ємний знак повної роботи зовнішніх сил?

16. У якому стані перебуватиме досліджувана механічна система, якщо робота зовнішніх та внутрішніх сил дорівнює нулю?

Завдання 6

1. Які переміщення точок системи називаються можливими?
2. Чим відрізняються дійсні переміщення від можливих?
3. У якому випадку дійсні переміщення є підмножиною можливих?
4. Яка аналітична умова виконується за означенням для ідеальних в'язей?
5. Для яких в'язей справедливий принцип можливих переміщень, а для яких – загальне рівняння статики?
6. Яким чином зв'язана кількість степенів вільності механічної системи з можливими переміщеннями?
7. У чому полягають переваги загального рівняння статики перед умовами рівноваги геометричної статики?
8. У чому складається методика застосування загального рівняння статики при розв'язанні задач?
9. Як перетворюється жорстка заробка при визначенні момента реактивної пари сил за допомогою загального рівняння статики?
10. Як перетворюється жорстке защемлення при визначенні однієї складової її реакції за допомогою загального рівняння статики?
11. Як перетворюється нерухомий шарнір при визначенні однієї складової його реакції за допомогою загального рівняння статики?
12. Чому дорівнює можлива робота момента пари сил?
13. Які додаткові співвідношення потрібно записати при застосуванні загального рівняння статики?

Завдання 7

1. Яким чином у загальному рівнянні динаміки враховується неідеальність в'язей, яка викликана силами тертя?

2. Для яких в'язей справедливий принцип Д'Аламбера-Лагранжа, а для яких – загальне рівняння динаміки?

3. Сформулюйте принцип Д'Аламбера-Лагранжа.

4. Яким чином зв'язана кількість степенів вільності механічної системи з загальним рівнянням динаміки? Чому дорівнює кількість степенів вільності вказаної у завданні системи тіл?

5. У чому полягає методика застосування загального рівняння динаміки при розв'язанні задач?

6. Який фізичний зміст доданків загального рівняння динаміки?

7. Які системи сил потрібно вказувати при застосуванні загального рівняння динаміки?

8. Які додаткові співвідношення потрібно отримати при застосуванні загального рівняння динаміки? Як вони записуються у вашому варіанті?

9. До чого зводиться система сил інерції блока з нерухомою віссю обертання?

10. До чого зводиться система сил інерції котка, який виконує плоскопаралельний рух?

11. Як запишеться загальне рівняння динаміки, якщо механічна система складається тільки з тіла 1 та 2?

12. Як запишеться загальне рівняння динаміки, якщо механічна система складається тільки з тіла 3, що рухається під дією сили натягу?

Завдання 8

1. Як зв'язані між собою узагальнені координати, швидкості та прискорення?

2. Як визначити кількість степенів вільності механічної системи?

3. Сформулюйте означення узагальненої сили.

4. В чому полягає правило визначення узагальненої сили через можливу роботу сил?

5. Які додаткові співвідношення потрібно записати при визначенні узагальненої сили через можливу роботу? Як вони виглядають у вашому варіанті?

6. Як визначити узагальнену силу через потенціальну енергію механічної системи? Чому дорівнює потенціальна енергія у вашому варіанті?

7. Як запишеться узагальнена сила за координатою s_1, якщо механічна система складається з тіла 1 та 2? (Для завдання 8.1)

8. Який вигляд матиме узагальнена сила за координатою φ_2, якщо механічна система складається тільки з тіла 1 та 2?

9. Для яких в'язей записується рівняння Лагранжа другого роду?

10. У чому полягають переваги рівнянь Лагранжа другого роду перед іншими способами складання динамічних рівнянь руху?

11. Сформулюйте методику складання рівнянь Лагранжа другого роду.

12. Як визначити кінетичну енергію тіла 1 через узагальнену координату φ_2 (завдання 8.1)?

13. Як визначається кінетична енергія тіла 5 (завдання 8.2) через узагальнену координату φ_2?

14. Як визначити кінетичну енергію тіла 2 через узагальнену координату s_1 (завдання 8.1)?

15. Як визначити кінетичну енергію тіла 2 через узагальнену координату φ_1 (завдання 8.2)?

ДОДАТОК

1. Таблиця інтегралів деяких елементарних функцій

$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + \tilde{N},\ n \neq -1$	$\int \mathrm{sh} t dt = \mathrm{ch} t + C$
$\int t^{\alpha} dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	$\int \mathrm{th} t dt = \ln(\mathrm{ch} t) + C$
$\int \frac{dt}{t} = \ln\lvert t\rvert + C$	$\int \mathrm{cth} t dt = \ln\lvert \mathrm{sh} t\rvert + C,\ t \neq 0$
$\int e^t dt = e^t + C$	$\int \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{th} t + C$
$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C,\ a \neq -1$	$\int \frac{dt}{\mathrm{sh}^2 t} = -\mathrm{cth} t + C,\ t \neq 0$
$\int \sin t dt = -\cos t + C$	$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{t}{a} + C,\ a \neq 0$
$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+t}{a-t} \right\rvert + C,\ a \neq 0$
$\int \mathrm{tg} t dt = -\ln\lvert \cos t\rvert + C,\ t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{a} \mathrm{Arth} \frac{t}{a} + C,\ \lvert t\rvert < a$
$\int \mathrm{ctg} t dt = \ln\lvert \sin t\rvert + C,\ t \neq k\pi$	$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{t+a}{t-a} \right\rvert + C,\ a \neq 0$
$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\mathrm{ctg} t + C,\ t \neq k\pi$	$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{Arcth} \frac{t}{a} + C,\ \lvert t\rvert > a$
$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \mathrm{tg} t + C,\ t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} + C,\ \lvert t\rvert < a$
$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}} = \ln(t + \sqrt{a^2 + t^2}) + C$
$\int \mathrm{ch} t dt = \mathrm{sh} t + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \ln\left\lvert t + \sqrt{t^2 - a^2} \right\rvert + C,$ $\lvert t\rvert > a$

2. Методика розв’язання звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Припустимо, що задано диференціальне рівняння вигляду:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \tag{1}$$

Нехай для шуканої змінної задано наступні початкові умови:

$$t = 0, \quad x(0) = x_0, \; \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Як відомо, розв’язок неоднорідного рівняння (1) подається як сума загального розв’язку x_1 відповідного однорідного рівняння та частинного розв’язку x_2 неоднорідного рівняння –

$$x = x_1 + x_2.$$

Для визначення розв’язку x треба виконати наступні дії:

1. Записати характеристичне рівняння для відповідного однорідного рівняння ($\ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$) у вигляді

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{2}$$

2. Знайти корені характеристичного рівняння (2)

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2}. \tag{3}$$

В залежності від співвідношення величин h і ω_0 загальний розв’язок x_1 відповідного однорідного рівняння може мати вигляд, наведений у наступній таблиці:

Співвідношення параметрів h і ω_0:	Корені характеристичного рівняння (λ_1 і λ_2):	Вигляд розв'язку x_1
$h > \omega_0$	• дійсні і різні: $\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$, $\lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$	$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} =$ $= e^{-ht}\left(C_1 e^{\sqrt{h^2-\omega_0^2}} + C_2 e^{-\sqrt{h^2-\omega_0^2}}\right)$
$h = \omega_0$	• дійсні рівні: $\lambda_1 = \lambda_2 = -h$	$x_1 = e^{-ht}(C_1 + C_2 t)$
$h < \omega_0$	• комплексно-спряжені: $\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega_0^2 - h^2} = -h \pm i\omega_*$, де $\omega_*{}^2 = \omega_0^2 - h^2$	$x_1 = e^{-ht}(C_1 \cos\omega_* t + C_2 \sin\omega_* t)$
$h = 0$	• чисто уявні: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$	$x_1 = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$

3. Частинний розв'язок x_2 неоднорідного рівняння (1) шукають у вигляді, що відповідає правій частині $f(t)$ цього рівняння:

У випадку, якщо $f(t) = const$, тобто стала, то $x_2 = A$;

У випадку, якщо $f(t) = ae^{\alpha t}$, то $x_2 = Ae^{\alpha t}$;

У випадку, якщо $f(t) = a\sin(\omega t + \beta)$ або $f(t) = a\cos(\omega t + \beta)$ (при цьому $\omega \neq \omega_0$, $h \neq 0$), то $x_2 = A\sin(\omega t + \beta) + B\cos(\omega t + \beta)$.

Якщо ж $h = 0$, то для $f(t) = a\sin(\omega t + \beta)$ слід взяти $x_2 = A\sin(\omega t + \beta)$, а для $f(t) = b\cos(\omega t + \beta)$ можна записати $x_2 = B\cos(\omega t + \beta)$.

При одночасному виконанні умов $\omega = \omega_0$ та $h = 0$ (випадок *резонансу*) частинний розв'язок x_2 має вигляд

$$x_2 = t\left[A\sin(\omega t + \beta) + B\cos(\omega t + \beta)\right].$$

У загальному випадку, якщо права частина диференціального рівняння має так званий спеціальний вигляд:

$$f(t)=\Big[(a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1}+\ldots+a_1 t + a_0)\cos\omega t +$$

$$+(b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1}+\ldots+b_1 t + b_0)\sin\omega t\Big]e^{\alpha t},$$

то при умові, що число $\alpha + i\omega$ не є корінь характеристичного рівняння (2), частинний розвязок x_2 набуває вигляду

$$x_2=\Big[(A_m t^m + A_{m-1}t^{m-1}+\ldots+A_1 t + A_0)\cos\omega t +$$

$$+(B_m t^m + B_{m-1}t^{m-1}+\ldots+B_1 t + B_0)\sin\omega t\Big]e^{\alpha t}.$$

Якщо ж число $\alpha + i\omega$ є корінь характеристичного рівняння (2) кратності r, то частинний розвязок x_2 подається так

$$x_2=t^r\Big[(A_m t^m + A_{m-1}t^{m-1}+\ldots+A_1 t + A_0)\cos\omega t +$$

$$+(B_m t^m + B_{m-1}t^{m-1}+\ldots+B_1 t + B_0)\sin\omega t\Big]e^{\alpha t}.$$

4. Підставити вираз x_2 у вихідне рівняння (взявши необхідні похідні) і, прирівнявши коефіцієнти при однакових функціях зліва і справа від знаку рівності, знайти шукані коефіцієнти $A,\ B$, і т. д.

5. Розв’язки x_1 і x_2 скласти в загальний розв’язок рівняння (1):

$$x = x_1 + x_2.$$

6. Знайти першу похідну від x за часом.

7. Підставити у знайдені вирази для x і $\dot{x}$ значення початкових умов $t=0,\quad x(0)=x_0,\ \ \dot{x}(0)=\dot{x}_0$ і знайти із отриманих рівнянь сталі інтегрування C_1 і C_2.

8. Записати і проаналізувати отриманий вираз $x(t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1, Т. 2. – М.: Наука, 1984. – Т. 2 – 624 с.
2. Божидарнік В. В., Величко Л. Д. Методика розв’язування і збірник задач з теоретичної механіки: Навч. посібник. – Луцьк: Надстир’я, 2003. – 496 с.
3. Кильчевский Н.А., Ремизова Н.И., Кильчевская Е.Н. Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.
4. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. В 2 т. – М.: Наука, 1972. – Т. 1. - 456 с.
5. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
6. Павловский М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
7. Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. Курс теоретической механики. – К.: Вища школа, 1973. – 359 с.
8. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Высш. шк., 2001. – 416 с.
9. Теоретическая механика. Динамика: Учебник / Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.; Под общ. ред. М.А.Павловского. – К.: Вища школа, 1990 – 480 с
10. Теоретическая механика: Збірник задач/О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін. За ред. М. А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – 400 с.